

תאריך הבחינה : 5.3.2023
 שם המרצה : ד"ר אבגני כץ
 שם המתרגל : תומר דולברג
 שם הקורס : מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה
 מספר הקורס : 203.1.1141
 שנה : 2023 סמסטר : א' מועד : ב'
 משך הבחינה : 4 שעות

הנחיות כלליות

- יש לרשום את התשובות במחברת בלבד.
- פרט לתשובות הסופיות, יש להציג את דרך הפתרון באופן ברור ומפורט.
- יש לפשט את הביטויים המתקבלים בתשובות הסופיות.
- מומלץ לבדוק את פתרונותיכם – סעיפים בהם תתקבל תשובה שגויה או יוצג פתרון חלקי יקבלו בדרך כלל לכל היותר 60% מהנקודות.
- לשימושכם דפי נוסחאות מצורפים.

בהצלחה מכל צוות הקורס!

שאלות

1. [15 נק'] השתמשו בכך ש-

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

ובזהות

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

כדי לקבל את טור טיילור של $\cosh x$ סביב $x = 0$ עד סדר חמישי, כולל. (אין להשתמש בתכונות אחרות של $\sinh x$ ו- $\cosh x$, פרט לכך ש- $\cosh 0 = +1$).

2. [15 נק'] מצאו את הערך הגבוה ביותר שמקבלת הפונקציה

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

בתחום המוגדר על ידי

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \leq a - bx$$

כאשר a ו- b הם מספרים חיוביים נתונים.

3. [15 נק'] נתונה עקומה במישור xy המתוארת על ידי

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) e^{kt}$$

כאשר $k > 0$ הוא קבוע נתון. חשבו את אורך העקומה מתחילתה ב- $t \rightarrow -\infty$ ועד להגעתה למרחק R מהראשית.

4. [18 נק'] עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים, קבעו האם התוצאה חיובית, שלילית או אפס. נמקו את קביעתכם באופן מפורט (או הציגו חישוב). אם תשובתכם תלויה בערכים של הפרמטרים a ו- b (מספרים ממשיים), פרטו לגבי המקרים השונים. (שימו לב: לא ייתן ניקוד עבור תשובות שלא תכלולנה נימוק/חישוב רלוונטי.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_a^b dy x^3 y^3 e^{-x^2 y^2} \quad (b > a) \quad (\text{א})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^a dy (ax - by^2) e^{-2x^4 - y^2} \quad (\text{ב})$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_a^b dy x^3 y^3 e^{-x^2 y^2} \quad (b > a) \quad (\text{ג})$$

5. [15 נק'] הראו כי עבור כל פונקציה $f(\vec{r})$ של וקטור המיקום התלת-מימדי \vec{r} מתקיים

$$\vec{\nabla} \times (\vec{r} f(\vec{r})) = a \vec{r} \times \vec{\nabla} f(\vec{r})$$

כאשר a הוא מספר שעליכם למצוא.

6. [22 נק'] נתון גליל אינסופי ברדיוס R עם צפיפות מסה אחידה (ליחידת נפח) ρ_0 . חשבו את שדה הכבידה $\vec{g}(\vec{r})$ שהוא יוצר בכל נקודה במרחב (בתוך הגליל ומחוצה לו). היעזרו במשפט גאוס.

תזכורת: שדה הכבידה $\vec{g}(\vec{r})$ הנוצר על ידי צפיפות מסה $\rho(\vec{r})$ מקיים

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})$$

כאשר G הוא קבוע הכבידה.