אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: 5.3.2023
שם המרצה: ד"ר אבגני כץ
שם המתרגל: תומר דולברג
שם הקורס: מבוא לשיטות מתמטיות בפיזיקה
מספר הקורס: 203.1.1141
שנה: 2023 סמסטר: א' מועד: ב'
משך הבחינה: 4 שעות

הנחיות כלליות

- יש לרשום את התשובות במחברת בלבד.
- פרט לתשובות הסופיות, יש להציג את דרך הפתרון באופן ברור ומפורט.
- יש לפשט את הביטויים המתקבלים בתשובות הסופיות.
- מומלץ לבדוק את פתרונותיכם – סעיפים בהם תתקבל תשובה שגויה או יוצג פתרון חלקי יקבלו בדרך כלל לכל היותר 60% מהנקודות.
- לשימושכם דפי נוסחאות מצורפים.

בהצלחה מכל צוות הקורס!

1. [15 נק'] השתמשו בכך ש־

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

ובזהות

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

כדי לקבל את טור טיילור של $\cosh x$ סביב $x = 0$ עד סדר חמישי, כולל. (אין להשתמש בתכונות אחרות של $\sinh x$ ו־$\cosh x$, פרט לכך ש־$\cosh 0 = +1$).

פתרון:

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x &= 1 + \sinh^2 x \\
&= 1 + \left(x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 \\
&= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6) \\
\cosh x &= \sqrt{1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\right)^2 + \mathcal{O}(x^6) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)
\end{aligned}$$

2. [15 נק'] מצאו את הערך הגבוה ביותר שמקבלת הפונקציה

$$f(x,y) = x^2 y^2$$

בתחום המוגדר על ידי

$$x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad y \leq a - bx$$

כאשר a ו־b הם מספרים חיוביים נתונים.

פתרון: נשים לב ש־

$$f(x,y) = x^2 y^2 > 0$$

בכל התחום, פרט לגבולות התחום $x = 0$ ו־$y = 0$, בהם היא אפס. כמו כן, הפונקציה עולה עם x ועם y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y > 0$$

לכן הערך הגבוה ביותר מתקבל היכן שהוא על הגבול $y = a - bx$, שעוצר אותנו מלהתקדם ב־x וב־y. על גבול זה, הפונקציה נתונה על ידי

$$f(x) = x^2 \left(a - bx\right)^2$$

הנגזרת שלה היא

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\left(a - bx\right)^2 - 2bx^2\left(a - bx\right) \\ &= 2x\left(a - bx\right)\left(a - 2bx\right) \end{aligned}$$

הנקודות $x = 0$ ו־$x = a/b$, שבהן הנגזרת מתאפסת, נמצאות בפינות התחום, על צירי y ו־x בהתאמה, שכבר ציינו ששם הפונקציה מתאפסת. הנקודה היחידה הנוספת שבה הנגזרת מתאפסת היא

$$x = \frac{a}{2b}$$

ניתן גם לבדוק שהנגזרת השנייה בנקודה זו שלילית. לכן זוהי נקודת מקסימום. ערך הפונקציה בנקודה זו הוא

$$f\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{a^4}{16b^2}$$

3. [15 נק'] נתונה עקומה במישור xy המתוארת על ידי

$$\vec{r}(t) = (\cos t,\, \sin t)\, e^{kt}$$

כאשר $k > 0$ הוא קבוע נתון. חשבו את אורך העקומה מתחילתה ב־$t \to -\infty$ ועד להגעתה למרחק R מהראשית.

פתרון: המרחק מהראשית נתון על ידי

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, e^{kt} = e^{kt}$$

לכן עלינו לחשב את אורך העקומה עד $t = t_R$ המוגדר על ידי

$$e^{kt_R} = R$$

אורך העקומה נתון על ידי

$$s = \int |d\vec{r}| = \int_{-\infty}^{t_R} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

כאשר

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= (-\sin t,\, \cos t)\, e^{kt} + k\,(\cos t,\, \sin t)\, e^{kt} \\ &= (-\sin t + k\cos t,\, \cos t + k\sin t)\, e^{kt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| &= \sqrt{(-\sin t + k\cos t)^2 + (\cos t + k\sin t)^2}\, e^{kt} \\ &= \sqrt{1 + k^2}\, e^{kt} \end{aligned}$$

אז אנחנו מקבלים

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{1 + k^2} \int_{-\infty}^{t_R} e^{kt} dt \\ &= \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k}\, e^{kt} \Big|_{-\infty}^{t_R} \\ &= \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k}\, R \end{aligned}$$

4. [18 נק'] עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים, קבעו האם התוצאה חיובית, שלילית או אפס. נמקו את קביעתכם באופן מפורט (או הציגו חישוב). אם תשובתכם תלויה בערכים של הפרמטרים a ו־b (מספרים ממשיים), פרטו לגבי המקרים השונים. (שימו לב: לא יינתן ניקוד עבור תשובות שלא תכלולנה נימוק/חישוב רלוונטי.)

(א)
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_a^b dy\, x^3 y^3\, e^{-x^2 y^2} \qquad (b > a)$$

פתרון: מכיוון שהאינטגרנד הוא פונקציה אי־זוגית ביחס ל־x, וגבולות האינטגרציה ב־y אינם תלויים ב־x, ותחום האינטגרציה ב־x סימטרי, התוצאה היא <u>אפס</u>.

(ב)
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{a} dy\, (ax - by^2)\, e^{-2x^4 - y^2}$$

פתרון: מכיוון שהאיבר הפרופורציוני ל־a הוא פונקציה אי־זוגית ביחס ל־x, וגבולות האינטגרציה ב־y אינם תלויים ב־x, ותחום האינטגרציה ב־x סימטרי , תרומתו מתאפסת. האיבר הפרופורציוני ל־b הוא פונקציה חיובית (פרט להתאפסות ב־$y = 0$) שמוכפלת ב־$-b$. לכן סימן התוצאה <u>הפוך לסימנו של b</u> (והתוצאה אפס אם $b = 0$).

(ג)
$$\int_{0}^{\infty} dx \int_a^b dy\, x^3 y^3\, e^{-x^2 y^2} \qquad (b > a)$$

פתרון: הגורם $x^3 e^{-x^2 y^2}$ חיובי בכל תחום האינטגרציה (פרט להתאפסותו ב־$x = 0$) וזוגי ב־y, והוא מוכפל ב־y^3 אשר אי־זוגי ב־y וחיובי עבור y חיובי. לכן התוצאה תיקבע על ידי המאזן בין כמה נמוך בערכים השליליים של y מתחיל תחום האינטגרציה (אם בכלל) לבין כמה גבוה בערכים החיוביים של y הוא מסתיים (אם בכלל). התוצאה תהיה <u>חיובית עבור $b > -a$, שלילית עבור $b < -a$, ואפס עבור $b = -a$</u>.

5. [15 נק'] הראו כי עבור כל פונקציה $f(\vec{r})$ של וקטור המיקום התלת־מימדי $\vec{r}$ מתקיים

$$\vec{\nabla} \times (\vec{r} f(\vec{r})) = a\, \vec{r} \times \vec{\nabla} f(\vec{r})$$

כאשר a הוא מספר שעליכם למצוא.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{\nabla} \times (\vec{r} f(\vec{r}))\right]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(r_k f(\vec{r})\right) \\
&= \epsilon_{ijk} \left(\delta_{jk} f(\vec{r}) + r_k \partial_j f(\vec{r})\right) \\
&= 0 + \epsilon_{ijk} r_k \left[\vec{\nabla} f(\vec{r})\right]_j \\
&= -\epsilon_{ikj} r_k \left[\vec{\nabla} f(\vec{r})\right]_j \\
&= -\left[\vec{r} \times \vec{\nabla} f(\vec{r})\right]_i
\end{aligned}$$

לכן הקשר מתקיים עבור $a = -1$.

6. [22 נק'] נתון גליל אינסופי ברדיוס R עם צפיפות מסה אחידה (ליחידת נפח) ρ_0. חשבו את שדה הכבידה $\vec{g}(\vec{r})$ שהוא יוצר בכל נקודה במרחב (בתוך הגליל ומחוצה לו). היעזרו במשפט גאוס.

תזכורת: שדה הכבידה $\vec{g}(\vec{r})$ הנוצר על ידי צפיפות מסה $\rho(\vec{r})$ מקיים

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r})$$

כאשר G הוא קבוע הכבידה.

פתרון:

נעשה אינטגרציה של שני אגפי המשוואה על נפח V של גליל שצירו על ציר הגליל הפיזיקלי (שניקח אותו להיות ציר z של קואורדינטות גליליות), רדיוסו $r \leq R$ ואורכו h:

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r})\,dV = -4\pi G\iiint_V \rho(\vec{r})\,dV = -4\pi^2 G\rho_0 h r^2$$

כאשר בשלב האחרון השתמשנו בכך שמדובר בצפיפות אחידה ρ_0 והנפח הוא $V=\pi r^2 h$. על ידי הפעלת משפט גאוס באגף שמאל נקבל

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = -4\pi^2 G\rho_0 h r^2 \tag{1}$$

כאשר המשטח S הוא השפה של V ו־$\hat{n}$ הוא הנורמל למשטח שפונה החוצה מהנפח. משיקולי סימטריה (סימטריה בין $\pm\hat{z}$, סימטריית העתקה בציר ה־z, סימטריה בין $\pm\hat{\phi}$, וסימטריית סיבוב ב־ϕ) נסיק ש־

$$\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\,\hat{r}$$

כאשר $\hat{r}$ הוא וקטור בסיס מהקואורדינטות הגליליות. עבור בסיסי הגליל $\hat{n}\perp\hat{r}$, לכן אינם תורמים לשטף. השטף דרך מעטפת הגליל, שם $\hat{n}=\hat{r}$ ו־$g(r)$ קבוע, נותן

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = g(r)\iint dS = 2\pi r h g(r) \tag{2}$$

מהשוואת משוואות (1) ו־(2) אנחנו מקבלים

$$g(r) = -2\pi G\rho_0 r$$

כלומר

$$\vec{g}(\vec{r}) = -2\pi G\rho_0 r\hat{r}$$

באופן דומה, עבור $r > R$ נקבל במקום משוואה (1)

$$\oiint_S \vec{g}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = -4\pi^2 G\rho_0 h R^2 \tag{3}$$

כי מעבר לרדיוס R הצפיפות היא 0, ומהשוואת משוואות (3) ו־(2) אנחנו מקבלים

$$g(r) = -2\pi G\rho_0\frac{R^2}{r}$$

כלומר

$$\vec{g}(\vec{r}) = -2\pi G\rho_0\frac{R^2}{r}\hat{r}$$