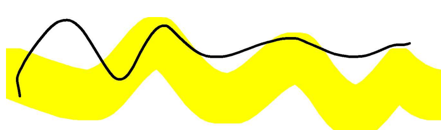
1)

# משוואות איינשטיין

פעולת הכבידה : גודל סקלרי

$$S_G = \int \underline{\underline{F}}(g_{\mu\nu}) \overbrace{\sqrt{-g}\, d^4x}$$

$$g = \det g_{\mu\nu}$$



2/

$$S_G = \text{קבוע} \times \int R\sqrt{-g}\, d^4x$$

$$S_G = \frac{1}{16\pi G_N} \int \underline{\underline{R}}\sqrt{-g}\, d^4x$$

פעולת הילברט-איינשטיין

3/ משוואות איינשטיין דרך

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G}\int \left(R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\, \delta g^{\mu\nu}\right) d^4x$$

$$\delta S_G = 0 \Rightarrow \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0}$$

משוואות איינשטיין דרך

10 משוואות

פעולת החומר
וטנזור התנע-אנרגיה

טנזור התנע-אנרגיה

$$\boxed{T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}}$$

סימטרי - 6 רכיבים
בלתי תלויים

5/

T00 - דיכאון, אנרגיה

T0i - 1Ge היגע

Tij - כנצור המלחץ \ stress)

[illegible] עם האלכסון, ספירה מאפס

i,j - אינדקסים למתאימים

6/

תכונות של $T_{\mu\nu}$ עבור חלקיק

נקודתי יחסותי (יחסות, פרמטרים)

$$S = -m \underbrace{\int d\tau} = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$= -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

7/ $T^{0\mu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{0\mu}(x(\tau))} = +\frac{m}{\sqrt{-g}} \int \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau}}$

$= \int p^\mu dx^0 \delta^4(x - x(\tau))$ $\qquad 1 \qquad p^\mu$

$= p^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$

8/

$$\delta^4\left(x - x(\tau)\right) d\tau$$

$$\delta^4\left(x - x(\tau)\right) = \delta\left(x_0 - x_0(\tau)\right)\delta\left(x_1 - x_1(\tau)\right)$$

$$\times\, \delta\left(x_2 - x_2(\tau)\right)\delta\left(x_3 - x_3(\tau)\right),$$

9/ $T^{i\mu} = m \int \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau))\, d\tau$

$$= m \int \frac{dx^\mu}{d\tau} dx^i \, \delta^4(x - x(\tau))$$

$$= m \int \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^i}{dx_0} \delta^4(x - x(\tau))\, dx_0$$

$$= p^\mu v^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$$

10/

עבור גוף זה נקודתי
ונעלמים על G הגלקים.

עבור טורם גלקסי, (ideal fluid)

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\, u^\mu u^\nu + p\, g^{\mu\nu}.$$

כאשר $u$ מהירות הצבר
$p$ - לחץ
$\rho$ - צפיפות אנרגיה.

11) $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $u(u_0, \vec{u})$, $u_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$

$u^0 = 1, u^i = 0$ עבור גוף במנוחה

$$T^\nu{}_\mu = (\rho + p) u^\nu u_\mu + \delta^\nu{}_\mu p = \begin{pmatrix} -\rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}$$

# משוואות איינשטיין

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}\, d^4x$$

נדרוש אקסטרימיזציה $\delta g$
כל הפעולה

$$0 = \delta S_G + \delta S_M$$

13/

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{8\pi G}G_{\mu\nu}-T_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\,d^4x=0$$

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

$$\boxed{R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi G\,T_{\mu\nu}}$$

14/

$$D^{\mu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = 0$$

$$D^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{D^{\mu} T_{\mu\nu} = 0}$$

15/

אם $S_M$ הינו סקלר

אזי $D^M T_M = 0$

אם $S_M$ סקלר אז הווריאנציה

שלה עבור שינוי קואורדינטות

מתאפסת $\delta S_M = 0$

16/ $\delta S_{M} = 0 \implies$

$$(*) \quad -\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\, d^4x = 0$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -\partial_\lambda g_{\mu\nu}\,\epsilon^\lambda - g_{\mu\lambda}\partial_\nu \epsilon^\lambda$$

$$- g_{\lambda\nu}\partial_\mu \epsilon^\lambda$$

$$x^\mu \to (x^\mu)' = x^\mu + \epsilon^\mu$$

117/

במערכת בה $\Gamma = 0$ מקומית

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\lambda}\partial_\nu \epsilon^\lambda - g_{\lambda\nu}\partial_\mu \epsilon^\lambda$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -\left(D_\nu \epsilon_\mu + D_\mu \epsilon_\nu\right)$$

נכון ב $(x)$

18)

$$\delta S_M = \frac{1}{2}\int \sqrt{-g}\; T^{\mu\nu}\left(D_\nu \epsilon_\mu + D_\mu \epsilon_\nu\right) \wedge d^4x$$

$$= \int \sqrt{-g}\; T^{\mu\nu}\, D_\nu \epsilon_\mu \, d^4x$$

$$= \int \sqrt{-g}\left(\underline{D_\mu\left(\epsilon_\nu T^{\mu\nu}\right)} - \epsilon_\nu \underbrace{D_\mu T^{\mu\nu}}\right) \wedge d^4x$$

$$= 0$$

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0$$