מבוא ל FFT

מצגת הסבר מוסף לתדריך בנושא FFT

מוטיבציה

- הכרות עם טרנספורמציית פורייה רציפה המופיעה רבות בהרבה הקשרים במדע.
- הכרות בסיסית עם מושגי יסוד באלקטרוניקה כגון מידע אנלוגי, דיגיטלי ודגימה.
- הכרות עם טרנס' פורייה דיסקרטית DFT וטרנס' פורייה דיסקרטית מהירה FFT.

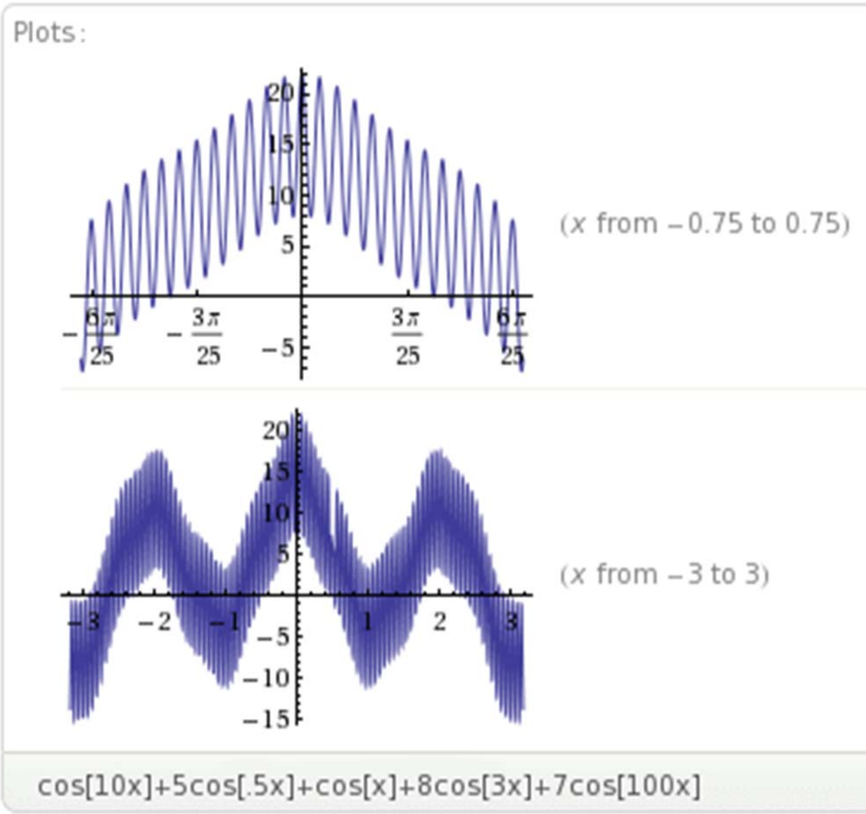
טרנס' פורייה רציפה

- הטענה של פורייה: פונקציות מחזוריות ניתן להציג אותן כסדרה של פונקציות טריגונומטריות (סכום של קוסינוסים וסינוסים)

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \qquad (1$$

- כאשר c_n היא האמפליטודה המשויכת לתדר ה n (יכול להיות מספר מרוכב).
- הערה: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

דוגמה: פונקציה מחזורית המורכבת מסכום טריגונומטרי:



מציאת ערכי האמפליטודה עבור כל תדר

- על מנת למצוא את האמפליטודה המתאימה לכל תדר, נצטרך להשתמש בנוסחה:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx \quad (2$$

- דוגמה: עבור הפונקציה:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

- נחשב את ההאמפליטודה:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) * e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx = -\frac{i}{4L}\int_{-L}^{L}\left(e^{\frac{i\pi x}{L}} - e^{-\frac{i\pi x}{L}}\right) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{i}{2}, \frac{i}{2} & n = 1, -1 \\ 0 & n \neq |1| \end{cases}$$

- ולכן הטור המתקבל:

$$f(x) \sim \frac{-i}{2}\left(e^{\frac{i\pi x}{L}} - e^{-\frac{i\pi x}{L}}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

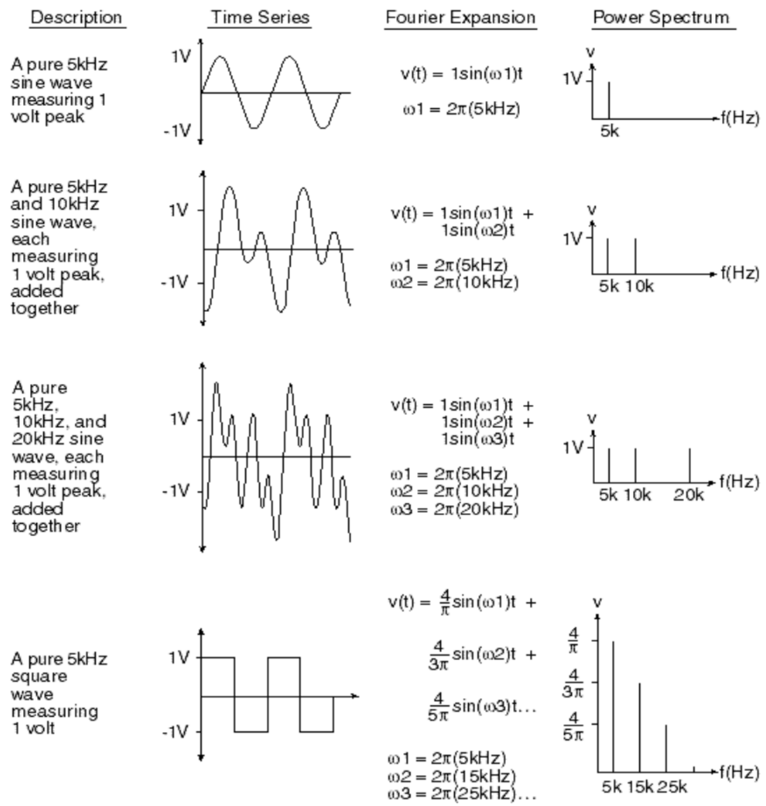
על בסיס המשוואה מעמוד הקודם

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

Power spectrum

- ה Power spectrum הוא למעשה הערך המוחלט של המספר C_n בריבוע (כזכור C_n יכול להיות מספר מורכב)
- נוח להשתמש בשורש של Power spectrum על מנת להציג את כל הספקטרום של הפונקציה המחזורית על גרף שמתאר את התלות של התדר כנגד השורש של Power spectrum המתאים לו.

- דוגמאות לספקטרומים של מספר פונקציות:



יסודות באלקטרוניקה

- הגדרות:
מידע אנלוגי: מידע שמופיע בתצורה של אות פיזיקלי ובעל יחידות פיזיקליות (לדוגמה מתח זרם וכ'ד).

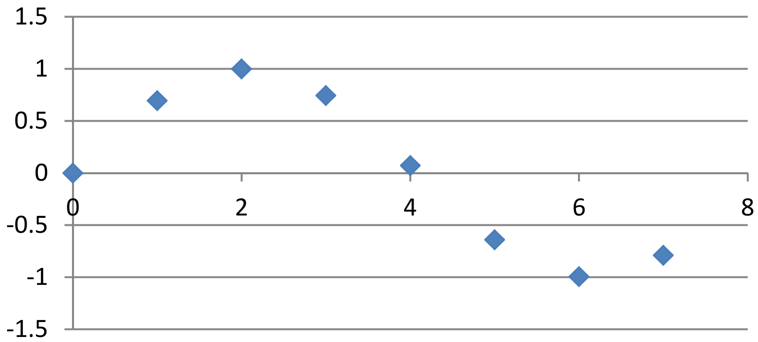
אות דיגיטלי: מידע מספרי המציין ערך כלשהו, המידע מעובר ע"י מילה בינארית של אפס או אחד

- בהינתן לנו אות אנלוגי, וברצוננו לבצע עליו חישוב ממוחשב (המחשב עובד בצורה דיגיטלית), עלינו לבצע המרה של המידע האנלוגי למידע דיגיטלי.
את המעבר עושים ע"י פעולה שנקראת דגימה.

הדגימה

- בהינתן אות כלשהו אנלוגי, המערכת בודקת את עוצמת האות כל זמן קבוע של Δt כך שזמן המדידה הכולל הוא T.
- את הערך שהמערכת בודקת היא הופכת למספר בעל משמעות של עוצמה יחסית.
- בסוף המדידה (אחרי זמן T) יש N תאי זיכרון שמכילים את המידע של האות כולו $T=N*\Delta t$.
- האות נשמר בזיכרון כאות דיסקרטי ולא רציף.

- דוגמה: אות דיסקרטי של גל סינוס שנדגם במערכת של 8 תאי זיכרון



מס התא	מספר התא בספרות בינאריות	הערך המספרי שהתא מכיל
0	000	0
1	001	0.694338288
2	010	0.99935938
3	011	0.744037194
4	100	0.071531511
5	101	0.641082067-
6	110	0.994239343-
7	111	0.789924159-

רמת ההפרדה של הדגימה (איכות)

- ככל שתא בזיכרון יכול להכיל מספר גדול יותר (יותר ביטים) רמת ההפרדה תהיה גדולה יותר.
- דוגמה: תא בזיכרון שמכיל רק ביט אחד (כלומר אפשרות להכיל ספרה בינארית אחת) יוכל למדוד רק שני ערכים שתלויים בתחום המדידה.
  לדוגמה כאשר תחום המדידה מוגדר מ 0 וולט ל 5 וולט, דגימה של פחות מ V2.5 ייקלט כספרה בינארית 0, ודגימה בעלת מתח גבוה מ V2.5 יקלט בתא כספרה 1

- דוגמה נוספת: כאשר תחום המדידה הוא בין 0 ל 5 וולט, ותא הזיכרון הוא באיכות של 3 ביט (כלומר 3 ספרות בינאריות היכולים להכיל 8 ערכים שונים (2 בחזקת 3)). ובהינתן אות של 1.875 וולט המידע שירשם בתא יהיה 011 (3 בספרות עשרוניות)
- דוגמה לסיום הנושא: במערכת של 16 ביט (65536 ערכים שונים) ותחום מדידה של - 60db (0.001V, החישוב נעשה ע"י הלאה של 10 בחזקת תחום המדידה חלקי 20) אם מתח הכניסה יהיה 1.525 ננוולט אז המידע שירשם בתא יהיה 0000000000000001 (כלומר 1 ב 16 ביט)

חוק הדגימה של נייקוויסט

- חוק הדגימה של נייקוויסט: בהינתן אות אנלוגי כלשהו בעל תדר f, על מנת שהאות ידגם כהלכה נדרש שתדר הדגימה יהיה פי שתים לפחות גבוה יותר.
- כלומר נדרש כי

$$\frac{1}{\Delta t} > 2f$$

טרנספורמציית פורייה דיסקרטית DFT

- נסמן מחסנית של N תאי זיכרון באופן הבא:

$$\ddot{X} = \{x(0), \dots, x(N-1)\}$$

כאשר x(k) מייצג תא במיקום k בזיכרון.

- טור פורייה באנלוגיה למשוואה 1בדף השלישי יראה כך:

$$x(k) = \sum_{j=0}^{N-1} c(j) e^{-i2\pi jk/N}$$

- כאשר c(j) הוא תא במחסנית נפרדת C המכילה את העוצמות עבור כל תדר.
- על מנת למצוא את c(j) ניתן לעשות היפוך באנלוגיה למשוואה 2 בדף הרביעי:

$$c(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{i2\pi jk/N}$$

- ניתן להשתמש באלגברה ליניארית ולכתוב נוסחה שתכליל את הנוסחאות האחרונות לכל המחסנית

$$\ddot{X} = W_n * C$$

$$C = \frac{1}{N} * W_N^{-1} * X$$

כאשר W = exp(2πi/N) ו

$$W_N = \begin{pmatrix} W & \cdots & W^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W^{j1} & \cdots & W^{jk} \end{pmatrix}$$

הנקראת מטריצת פורייה

- הערה: בתדריך המעבדה המשוואות נראות אחרת בגלל הגדרות שונות.

טרנספורמציית פורייה מהירה FFT

- הבעיה: ברגע שמטריצת פורייה היא בעלת הרבה איברים ,כגון 1000 על 1000 על מנת שרמת הפירוט תהיה גבוה, יידרש למערכת לבצע מליון מכפלות , כלומר זמן חישוב גבוה.

- הפיתרון: נדמה לעצמנו שיש לנו תא זיכרון בודד.
אם נבצע עליו טרנס' פורייה נקבל את האיבר עצמו (בדוק) (כלומר האמפליטודה שווה לערך המדידה)

$$c(0) = \frac{1}{1}\sum_{k=0}^{1-1} x(k)e^{\frac{i2\pi 0k}{1}} = x(0)$$

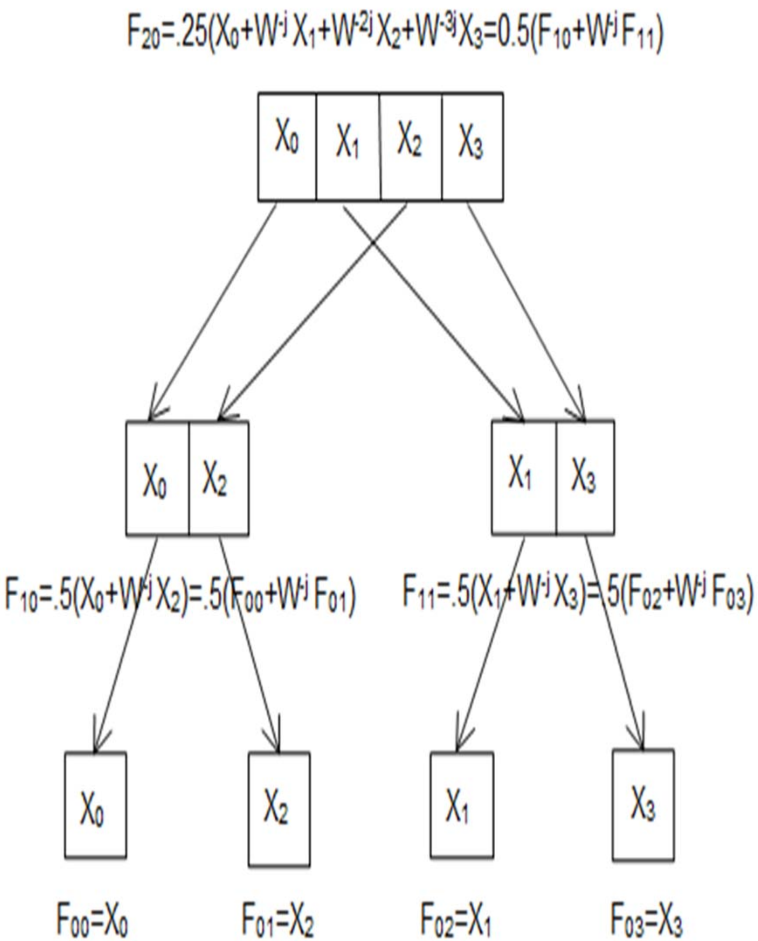
- עיקרון השני שצריך להנחות אותנו הוא שניתן לפרק את טרנספורמציית פורייה לאיברים זוגיים ואי זוגיים:

$$c(j) = \frac{1}{N}\sum_{odd\,k} x_j(k)W^{-jk} + \frac{1}{N}\sum_{even\,k} x_j(k)W^{-jk} =$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}+1} x_j(2k)W^{-2jk} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}+1} x_j(2k+1)W^{-j(2k+1)}\right)$$

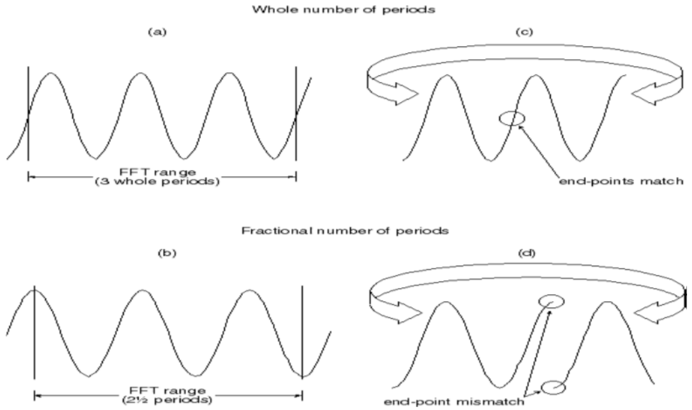
$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}+1} x_j(2k)W^{-2jk} + W_N^{-j}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}+1} x_j(2k+1)W^{-j(2k)}\right) = .5(F_{even} + W^{-j}F_{odd})$$

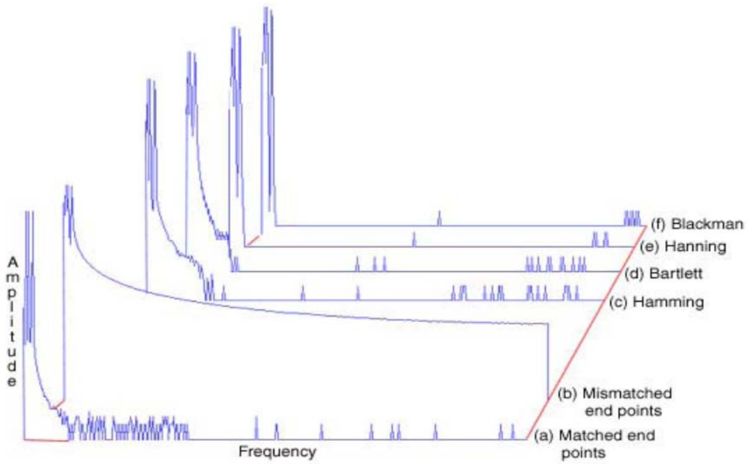
המשך FFT



- על בסיס שני העקרונות שהצגנו, קולי טורקי הציגו שיטה רקורסיבית לפיתרון משוואת פורייה.(הערה: מנגנון רקורסיבי הוא מנגנון התלוי בתוצאה הקודמת לו ,לדוגמה: $a_n = a_{n-1} + 1$)
- שלב ראשון מפרקים את המערך לזוגות זוגיים ואי זוגיים, ואז מתחילים לבצע פורייה מהתא הבודד עד שמגיעים בצורה של רקורסיה למערך כולו.
- מופיע דוגמה בצד שמאל, נדרש תחילה לראות איך המערך של 8 תאים מתפרקים לזוגות תאים זוגיים ואי זוגיים, לאחר מכן צריך ללכת מתחתית הדיאגראמה ולראות איך מתבצע הטרנס' משלב לשלב, כאשר בסוף כל שלב רשום משוואת הרקורסיה.
- בדרך הנ"ל אנו נדרשים לזכור את הטרנס' האחרונות שעשינו ולבצע עליהם שוב פעם טרנס' (רקורסיה).
- השיטה מובילה למספר מואט יותר של חישובים אך דורשת יותר זיכרון (שיש בשפע) על מנת להכיל את שלבי הביניים.
- מומלץ לקרוא את ההסבר בתדריך, על השיטה הפשוטה שניתן לסדר את המערך של התאים הבודדים בסדר הנכון לפי שיטת היפוך הביטים.

חלונות





- לרוב זמן מחזור המדידה (הזמן שלוקח למלא מחסנית, או במילים אחרות רוחב הפס, או התדר הנמוך ביותר בטרנס פורייה) לא תואם את מחזור האות הנכנס, ועל כן ייתכן ונקבל אי רציפות בין תחילת האות לסופו (ראה איור).
- נמצא שע"י הכפלת כל ערך דגימה בערך יחס כלשהו, ניתן להחליק את קצוות האות, וע"י כך לסנן את הרעש הנוצר מהמדרגה.
- לרוב איבוד המידע שנעשה ע"י החלון, עדיף על פני הרעש שנוצר מהמדרגה (ראה איור השני).
- בנקודה זו אני עוצר. מטרת המצגת היא להציג ראיה שונה ודוגמאות שונות על הנושא של FFT, ועל כן היא לא מחליפה את התדריך אלא מוסיפה הבנה על הכתוב שם.
  ראוי שאם לא הבנתם את הנושא תפנו למדריך שיעזור לכם.