כבידה

רשימות על-פי הרצאות בקורס בכבידה באוניברסיטת בן-גוריון
המרצה והמחבר: רמי ברושטיין
ערך והוסיף פרקים 0,1,2 וחיבר חלק מהשאלות: איליה גורביץ'
ערך חלק מהשאלות: דניאל לוי
תודה לתלמיד תומר טל על רשימות מהקורס והתרגול.

פרק 0: **הקדמה**

מטרות הקורס הן הכרת והבנת כבידה ברמה בסיסית, והכרת והבנת הפיסיקה של מערכות בהן כבידה ניוטונית אינה תקפה. תורת היחסות הכללית של איינשטין בנויה בצורה שונה לחלוטין ויוצאת מהנחות יסוד שונות לחלוטין מאשר התורה הניוטונית. בעוד שהתורה הניוטונית מתארת אינטרקציה ישירה בין גופים, תורת איינשטין מניחה שכוח הכבידה ניתן לתיאור בצורה שקולה בה כל השפעתו מקודדת בגאומטריה של המרחב-זמן. החומר מעקם את המרחב-זמן וכך משפיע על תנועת גופים אחרים בו. שני התיאורים שקולים ולכן ניתן לבחור באילו מהם להשתמש. למרות הנאמר לעיל, החומר והמרחב-זמן אינם בעלי מעמד שווה בתורה. כדי להבין כבידה ברמה טובה יותר, ובמיוחד להבין את קשריה עם תורת הקוונטים, יש כנראה למצוא תיאור בו יהיו החומר והמרחב-זמן באותו מעמד. המחשבה המודרנית מייחסת לתורת היחסות הכללית מעמד של תורה אפקטיבית, ולא בסיסית, אך מכיוון שהניבויים של תורה זו נמדדו במדויק ונמצאו נכונים על כל תורה המכלילה את תורת היחסות הכללית לשחזר את ניבוייה. לכן חומר הלימוד חשוב גם לאלו שבכוונתם לצאת אל מעבר לתורת היחסות הכללית הסטנדרטית.

בקורס נדון רק במערכות שבהם התורה הניוטונית לא תקפה לחלוטין: גלי כבידה, חורים שחורים והיקום.

בקורס לא נדון במערכות בהן הכבידה היחסותית מהווה תיקון מסדר ראשון לכבידה הניוטונית, כגון בנקיפה של מסלול גופים סביב השמש, ועיקום קרני אור סביבה, למרות שמערכות אלו מעניינות וחשובות מאוד. דוגמה מעניינת במיוחד לסוג זה היא לוויני GPS ולוויני תקשורת אשר חשוב שיישארו בנקודה קבועה ביחס לכדור הארץ. התיקונים היחסותיים הם אמנם קטנים, אך הם נוטים להצטבר לאורך זמן ולכן חשוב לקחת אותם בחשבון. כיום כל מערכת בקרה לוויינית, לוקחת בחשבון תיקונים של יחסות כללית.

כמו כן הקורס לא יכלול תיאור מתמטי פורמלי של המרחב-זמן, ודיון במתמטיקה המרתקת של מרחבים גאומטריים. נלמד רק את המתמטיקה הדרושה להבנת הפיסיקה שנלמד, אך לא פחות

ממנה. זאת בדומה לעיקרון המנחה בספרו של Hartle. במובן מסוים קורס זה הוא קורס המשך לקורס המכוסה בספרו המומלץ.
את הרשימות האלו משלים חומר נוסף הנמצא באתר האינטרנט של הקורס, תרגילים, פתרונות, חומר לקריאה נוספת, ואמצעי עזר לחישוב.

באילו תנאים תורת הכבידה הניוטונית אינה תקפה?

כזכור בתורה הניוטונית, אנרגיית הכבידה נתונה על-ידי:

$$U = \frac{G_N M m}{r} \tag{0.1}$$

כאשר M ו-m הם המסות של שני גופים המושכים זה את זה, r הוא המרחק ביניהם ו-G_N הוא הקבוע של ניוטון (לערכים עדכניים של הקבועים הפיסיקליים: http://pdg.lbl.gov.). התורה אינה תקפה כאשר אחד משני התנאים הבאים מתקיים:

1. U מגיעה לסדר הגודל של אנרגיית המנוחה, כלומר:

$$U \sim mc^2 \Rightarrow r \sim \frac{GM}{c^2} \tag{0.2.1}$$

במקרה זה קורה הכבידה הופכת ל "כבידה חזקה" והתורה הלא-יחסותית אינה תקפה. בחורים שחורים וביקום יש כבידה חזקה.

2. קצב השינוי של U הוא יחסותי, כלומר:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}U \sim \left|\vec{\nabla} U\right| \tag{0.2.2}$$

ניתן להבין את תנאי (0.2.2) אם נזכור ש $\left|\vec{\nabla} U\right|$ הוא גודל כוח הכבידה ו $\frac{\partial}{\partial t}U$ הוא ההספק של השדה. כמו כן נזכור שבמכניקה לא יחסותית, ההספק שווה לכוח כפול המהירות, ובהצבה ל (0.2.2) נקבל שתנאי זה קובע כי "מהירות השדה" היא מסדר גודל של מהירות האור ולכן **קצב שינוי השדה הוא יחסותי**. גלי כבידה ולעיתים היקום הם דוגמאות למערכות בהן קצב השינוי יחסותי. לכן כדי להבין את הפיסיקה שלהן חובה להשתמש בתורה יחסותית.

פרק 1: חזרה והשלמה: מושגי יסוד וכלים מתמטיים

הטנזור המטרי וטנזורים קוואריאנטים אחרים

אלמנט האורך של מרחב-זמן שטוח בעולם תלת-ממדי הוא:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.1}$$

נוכל לכתוב באמצעות הסכם הסיכום של איינשטיין כך:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.2}$$

כאשר האינדקסים μ ו-ν יכולים לקבל את כל הערכים השלמים בין 0 ו-3,[1] כאשר בקואורדינטות הנ"ל

ו: $t = x^0,\ x = x^1,\ y = x^2,\ z = x^3$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu}$$

במערכת קואורדינטות כדורית, $x^0 = t,\ x^1 = r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ x^2 = \theta \equiv \cos^{-1}\frac{z}{r},\ x^3 = \varphi \equiv \tan^{-1}\frac{y}{x}$

נקבל שאלמנט האורך הוא כמו ב-(1.2) כאשר:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

לכן נוסחה (1.2) נכונה בכל מקרה אבל $g_{\mu\nu}$ הוא תלוי מרחב-זמן ומערכת קואורדינטות. $g_{\mu\nu}$ נקרא הטנזור המטרי ויש לציין שהוא מוגדר כטנזור סימטרי[2]. אלמנט האורך הוא אינווריאנטי לטרנספורמציית קואורדינטות ולכן אם נבצע טרנספורמציית קואורדינטות $x^\mu \to \tilde{x}^\mu$:

$$d\tilde{s}^2 = ds^2 \ \Rightarrow\ \tilde{g}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

נשתמש בנוסחת הדיפרנציאל השלם $d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$, נציב בביטוי הנ"ל ונקבל:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \ \Rightarrow\ g_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}$$

---

[1] מעתה והלאה אנחנו נניח את הסכם הסיכום, כלומר: $a^\mu b_\mu \equiv \sum_\mu a^\mu b_\mu$.

[2] כל מרחב שבו ניתן להגדיר מטריקה נקרא מרחב רימאני (אלו המרחבים היחידים שבהם נדון בקורס הזה).

זהו חוק הטרנספורמציה של הטנזור המטרי. למעשה חוק הטרנספורמציה הזה מתאים לכל טנזור קווריאנטי מסדר שני, חוק הטרנספורמציה הכללי לטנזור כלשהו הוא:

$$\tilde{T}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} \cdot \frac{\partial\tilde{x}^{\beta_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial\tilde{x}^{\beta_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{\beta_q}}{\partial x^{\nu_q}} \cdot \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial\tilde{x}^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial\tilde{x}^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial\tilde{x}^{\alpha_p}} \qquad (1.3)$$

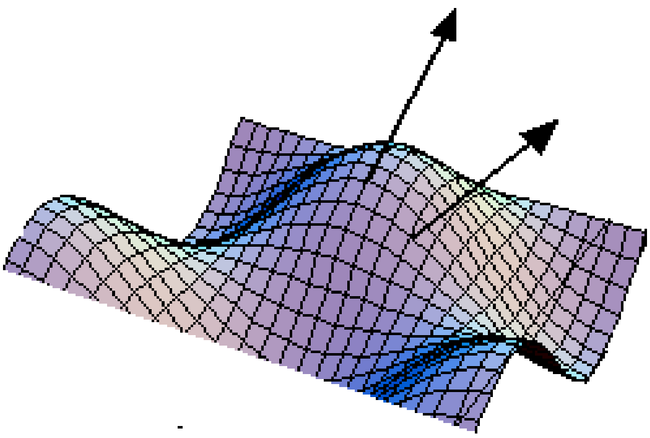
כאשר האינדקסים התחתונים נקראים אינדקסים קוואריאנטים והאינדקסים העליונים קונטראווריאנטים. מעבר בין אינדקסים קווריאנטים וקונטרווריאנטים נעשה ע"י הטנזור המטרי, לדוגמה: $T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}T^{\lambda}_{\nu}$ מכאן גם ניתן לראות ש $g^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}$ תמיד, היות ו $\delta^{\mu}_{\lambda}T^{\lambda}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\lambda}T^{\lambda}_{\nu}$. כך גם ניתן להגדיר את הטנזור המטרי הקונטרווריאנטי $g^{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\lambda}g^{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\lambda} \qquad (1.4)$$

ולכן אנו רואים שהטנזור המטרי הקונטרווריאנטי הוא המטריצה ההפכית של הטנזור המטרי.

הנגזרת הקוואריאנטית וסמלי קריסטופל

במרחב-זמן עקום $\partial_{\mu}A^{\nu}$ אינו טנזור גם אם A^{ν} הוא וקטור. הסיבה לכך היא שכאשר אנו מזיזים וקטור מנקודה אחת לשניה במרחב הוקטור משתנה לא רק בגלל התלות שלו במיקום אלא גם בגלל התלות של המטריקה במיקום. מנקודת מבט אחרת עקמומיות המרחב משנה את הווקטור (איור 1.1).



איור 1.1

כאשר וקטור מוזז במרחב עקום הוא משתנה גם בגלל עקמומיות המרחב

לכן השינוי המלא של הווקטור צריך להיות תלוי בתכונות של המטריקה. אנו דורשים שהנגזרת החדשה הקרויה "נגזרת קווריאנטית", תהיה ליניארית ולכן נקבל:

$$D_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A^\lambda \tag{1.5}$$

כאשר $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ נקראים סמלי קריסטופל או הקשר האפיני. נדרוש גם שהנגזרת הקווריאנטית תקיים גם את כלל לייבניץ למכפלה:

$$D_\mu (XY) = XD_\mu Y + YD_\mu X \tag{1.6}$$

כעת נזכור שאם A^μ ו- B_μ הם וקטורים אזי $A^\mu B_\mu$ הוא סקלר. סקלר לא מושפע מעקמומיות ולכן הנגזרת הקווריאנטית שלו היא הנגזרת הרגילה,

$$\begin{aligned} &D_\mu \left(A^\nu B_\nu\right) = \partial_\mu \left(A^\nu B_\nu\right) \Rightarrow A^\nu \left(D_\mu B_\nu\right) + \left(D_\mu A^\nu\right) B_\nu = A^\nu \left(\partial_\mu B_\nu\right) + \left(\partial_\mu A^\nu\right) B_\nu \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^\nu \left(D_\mu B_\nu\right) + \left(\partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A^\lambda\right) B_\nu = A^\nu \left(\partial_\mu B_\nu\right) + \left(\partial_\mu A^\nu\right) B_\nu \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^\nu \left(D_\mu B_\nu\right) = A^\nu \left(\partial_\mu B_\nu\right) - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A^\lambda B_\nu \Rightarrow A^\nu \left(D_\mu B_\nu - \partial_\mu B_\nu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} B_\lambda\right) = 0 \end{aligned}$$

מכיוון שהזהות נכונה לכל A^μ נקבל:

$$D_\mu B_\nu = \partial_\mu B_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} B_\lambda \tag{1.7}$$

כעת נדרוש שנגזרת קווריאנטית של טנזור תהיה גם היא טנזור. עבור וקטור כלשהו A^μ מתקיים $g_{\mu\nu} A^\mu = A_\nu$. ולכן $D_\mu A_\nu = D_\mu \left(g_{\nu\lambda} A^\lambda\right)$ אבל אם $D_\mu A_\nu$ הוא טנזור אז גם מתקיים $D_\mu A_\nu = g_{\nu\lambda} D_\mu A^\lambda$ ולכן נקבל:

$$g_{\nu\lambda}\left(D_\mu A^\lambda\right) = D_\mu \left(g_{\nu\lambda} A^\lambda\right) = g_{\nu\lambda}\left(D_\mu A^\lambda\right) + \left(D_\mu g_{\nu\lambda}\right) A^\lambda \Rightarrow \left(D_\mu g_{\nu\lambda}\right) A^\lambda = 0$$

מכיוון ששוויון זה מתקיים לכל וקטור A^μ נקבל שתמיד:

$$D_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \tag{1.8}$$

כלומר מצאנו כי הנגזרת הקווריאנטית של הטנזור המטרי מתאפסת.

מהי הנגזרת הקווריאנטית של טנזור כלשהו? נכפיל שני וקטורים במכפלה חיצונית (היות וידוע כי המכפלה החיצונית של שני וקטורים היא טנזור):

$$\begin{aligned} &D_\mu \left(A_\nu B_\lambda\right) = A_\nu \left(D_\mu B_\lambda\right) + \left(D_\mu A_\nu\right) B_\lambda = A_\nu \left(\partial_\mu B_\lambda - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} B_\sigma\right) + \left(\partial_\mu A_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma\right) B_\lambda = \\ &= \partial_\mu \left(A_\nu B_\lambda\right) - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} A_\nu B_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma B_\lambda \Rightarrow D_\mu T_{\nu\lambda} = \partial_\mu T_{\nu\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} T_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda} \end{aligned}$$

ניתן להמשיך את התהליך ולכפול חיצונית מספר כלשהו וקטורים בכדי לקבל את הנוסחה הכללית:

$$D_\mu T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \partial_\mu T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} + \sum_{i=1}^{q} \Gamma^{\beta_i}_{\mu\nu} T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{i-1}\nu\beta_{i+1}\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} - \sum_{i=1}^{q} \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha_i} T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i-1}\nu\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p} \tag{1.9}$$

נחזור כעת ל (1.8) ונפתח:

$$D_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \Rightarrow \partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda}$$

כעת נרשום את הביטוי הנ"ל בפרמוטציות שונות של האינדקסים:

$(1)\ \partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda}$

$(2)\ \partial_\nu g_{\mu\lambda} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu}$

$(3)\ \partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} g_{\sigma\nu}$

(1)+(2)-(3) ייתן:

$$2\Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma} = \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\mu} \qquad (1.10)$$

נכפיל את (1.10) ב $\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}$ ונציב את (1.4) ונקבל:

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}\right) \qquad (1.11)$$

יש לשים לב לכך שסמלי קריסטופל סימטריים באינדקסים התחתונים. וכמו כן שאם הנגזרות של המטריקה מתאפסות כולן בנקודה מסויימת אז גם כל סמלי קריסטופל מתאפסים זהותית.

עקומות גאודסיות והמשוואה הגאודסית

עקומה גאודסית מגדירה קו ישר במרחב עקום.

ניתן להגדירה בשתי דרכים:

1. הווקטור המשיק לעקומה אינו משתנה לאורכה של העקומה.
2. הקו הקצר[3] ביותר בין שתי נקודות.

נחשב את העקומה לכל הגדרה ונראה שהן עקביות.

1. הקואורדינטות של העקומה הן $x^\mu(\lambda)$ כאשר λ נקרא המשתנה האפיני והוא פונקציה ליניארית של הזמן העצמי τ. הווקטור המשיק לעקומה הוא $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. אם u^μ קבוע לאורך העקומה, אז הנגזרת הקוואריאנטית של u^μ לאורך העקומה מתאפסת. הנגזרת הכיוונית לאורך העקומה היא המכפלה הסקלרית של הווקטור המשיק לעקומה בנגזרת הקוואריאנטית. לכן המשוואה אותה מקיימת העקומה הגיאודסית לפי הגדרה מס' 1 היא:

$$u^\mu D_\mu u^\nu = 0 \Rightarrow \frac{dx^\mu}{d\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}$$

---

[3] פורמלית עבור הצורה שבה כתבנו את המטריקה, $ds^2 < 0$ עבור מסלולים חומריים ולכן העקומה הגאודסית הוא המסלול הארוך ביותר.

2. אורך העקומה הוא $s=\int ds=\int\sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}=\int d\lambda\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}$. אנו צריכים לדרוש שאורך העקומה יהיה אקסטרמלי ולכן עלינו לבצע וריאציה שתביא למשוואות אוילר לגרנז' של הלגרנז'יאן $L=\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}$:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}L=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}L\;\Rightarrow\;\frac{d}{d\lambda}\frac{g_{\mu\nu}u^{\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}=\frac{\partial_{\mu}g_{\nu\kappa}u^{\nu}u^{\kappa}}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;u^{\kappa}\partial_{\kappa}\frac{g_{\mu\nu}u^{\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}=\frac{\partial_{\mu}g_{\nu\kappa}u^{\nu}u^{\kappa}}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\frac{g_{\mu\nu}\frac{d}{d\lambda}u^{\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}-\frac{g_{\mu\nu}u^{\nu}u^{\kappa}\partial_{\kappa}\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}{2\sqrt{\left(g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}\right)^{3}}}+\frac{\partial_{\kappa}g_{\mu\nu}u^{\nu}u^{\kappa}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}=\frac{\partial_{\mu}g_{\nu\kappa}u^{\nu}u^{\kappa}}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}}$$

כעת עבור $\lambda=\tau$, $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}=g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}dx^{\nu}}{d\tau^{2}}=\frac{ds^{2}}{d\tau^{2}}=-1$ ולכן האיבר השני בשורה האחרונה מתאפס. וכעת נכפול את המשוואה שקיבלנו ב $g^{\mu\alpha}\sqrt{g_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}}$:

$$\frac{du^{\alpha}}{d\lambda}+\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(2\partial_{\rho}g_{\mu\nu}-\partial_{\mu}g_{\nu\rho}\right)u^{\rho}u^{\nu}=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\frac{du^{\alpha}}{d\lambda}+\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(\partial_{\rho}g_{\mu\nu}+\partial_{\nu}g_{\mu\rho}-\partial_{\mu}g_{\nu\rho}\right)u^{\rho}u^{\nu}=0\;\Rightarrow\;\frac{du^{\alpha}}{d\lambda}+\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}u^{\rho}u^{\nu}=0$$

וקיבלנו את אותה משוואה שקיבלנו מהגדרה מס' 1.

משתי השיטות קיבלנו את אותה תוצאה ולכן נסכם שהעקומה הגאודסית מקיימת את המשוואה הגיאודסית:

$$\frac{d^{2}x^{\nu}}{d\lambda^{2}}+\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}=0 \tag{1.12}$$

ההנחה הבסיסית של תורת היחסות: **חלקיקים חופשיים נעים על עקומות גאודסיות.**

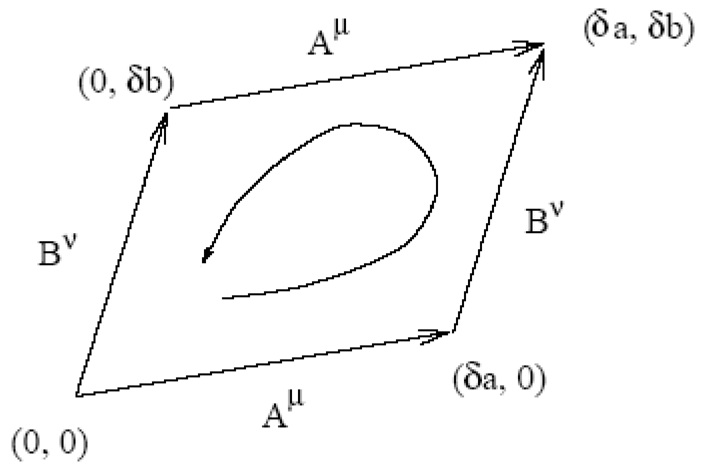
משוואה (1.12) מחליפה את החוק הראשון של ניוטון במסגרת תורת הכבידה של איינשטיין והיא קובעת תנועה של גופים כאשר לא פועלים עליהם כוחות חיצוניים. אם פועלים כוחות יש להוסיף אבר כוח למשוואה

$$\frac{d^{2}x^{\nu}}{d\lambda^{2}}+\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}=f^{\nu} \tag{1.13}$$

משוואה (1.13) מחליפה את החוק השני של ניוטון במסגרת תורת הכבידה של איינשטיין.

עקמומיות

למרות שלנגזרות הקוואריאנטיות ולנגזרות הרגילות תכונות רבות משותפות, יש תכונה חשובה מאוד שאינה משותפת: **הנגזרות הקוואריאנטיות אינן חילופיות**. תכונה זו מבטאת את העובדה שבמרחב עקום שוקטור שעובר מסלול סגור וחוזר לנקודה המקורית ממנה יצא, לא בהכרח חוזר גם לערכו המקורי. אם הוקטור חוזר לעצמו אחרי שעבר כל מסלול סגור אפשרי אז המרחב שטוח, אחרת המרחב עקום.



איור 1.2

מסלולים שונים היוצאים מאותה נקודה ומגיעים לנקודה אחרת

נדון במסלול סגור כלשהו המאופיין ע"י וקטורים אינפיניטסימליים δa^μ ו- δb^μ. השינוי של וקטור V^μ לאחר תנועה בכיוון מסוים הוא $V^\mu\left(x^\alpha+\delta a^\alpha\right)-V^\mu\left(x^\alpha\right)=\delta a^\alpha D_\alpha V^\mu$, נבצע את התהליך לאורך המסלול[4] ונראה כי:

$$\delta V^\mu=\delta a^\alpha \delta b^\beta\left[D_\alpha, D_\beta\right] V^\mu=\delta a^\alpha \delta b^\beta R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu \qquad (1.14)$$

כאשר

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}=\partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu-\partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu+\Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho-\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \qquad (1.15)$$

והוא נקרא טנזור רימאן[5] (Riemann).

נזכור שכאשר דנו בטנזור המטרי, הייה קשה לנו לקבוע האם המרחב שטוח או לא, היות והמטריקה הייתה יכולה להראות מסובכת בגלל מעבר קואורדינטות. טנזור רימאן מאפשר לנו לקבוע חד משמעית את עקמומיות המרחב ללא תלות בבחירת קואורדינטות. מכיוון שהוא טנזור, אם הוא מתאפס במערכת קואורדינטות אחת אז הוא מתאפס בכולן. ברור גם שהוא מתאפס עבור מטריקת מינקובסקי (מרחב-זמן שטוח). לכן **אם טנזור רימאן מתאפס אז המרחב שטוח, אחרת הוא עקום**.

[4] יש לזכור שגם סמלי קריסטופל תלויים במיקום ולקחת גם את השינוי שלהם בחשבון.

[5] ראו תרגיל 1.

כעת נדון בסימטריות של טנזור רימאן, קל יותר לדון בהם עבור טנזור רימאן הקווריאנטי: $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = g_{\mu\rho} R^{\rho}{}_{\nu\lambda\sigma}$

ממשוואה (1.15) ניתן לראות ש:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma} \tag{1.16.1}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda} \tag{1.16.2}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu} \tag{1.16.3}$$

כמו כן ניתן לראות גם שמתקיים:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\sigma\nu} = 0 \tag{1.16.4}$$

כמו כן טנזור רימאן מקיים את זהויות ביאנקי (Bianchi):

$$D_\rho R_{\mu\nu\lambda\sigma} + D_\mu R_{\nu\rho\lambda\sigma} + D_\nu R_{\rho\mu\lambda\sigma} = 0 \tag{1.17}$$

הנובעת מזהויות ביאנקי הכללית אותן מקיימות הנגזרות הקוואריאנטיות

$$\left[\left[D_\mu, D_\nu\right], D_\lambda\right] + \left[\left[D_\lambda, D_\mu\right], D_\nu\right] + \left[\left[D_\nu, D_\lambda\right], D_\mu\right] = 0$$

כמה משתנים בלתי-תלויים מוכלים בטנזור רימאן במרחב-זמן D-ממדי?

מ- (1.16.1) ו (1.16.2) נובע שטנזור רימאן אנטי-סימטרי בזוג האינדקסים הראשון והשני ולכן במקום D דרגות חופש לכל אינדקס נוכל לומר שיש $\frac{1}{2}D(D-1)$ דרגות חופש לכל זוג. מ-(1.16.3) הטנזור סימטרי להחלפת הזוגות ולכן בסך הכול יש $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}D(D-1)\left[\frac{1}{2}D(D-1)+1\right]$ דרגות חופש. אבל עדיין לא התחשבנו במשוואה (1.16.4) המאלצת את החלק האנטי-סימטרי לחלוטין של טנזור רימאן. לכן יש להחסיר את מספר דרגות החופש של טנזור אנטי-סימטרי לחלוטין מדרגה רביעית מהתוצאה. את מספר דרגות החופש הנ"ל מספרת לנו קומבינטוריקה פשוטה: $\binom{D}{4} = \frac{D(D-1)(D-2)(D-3)}{24}$. נחסיר מספר זה מהתוצאה הקודמת ונקבל שמספר המשתנים הבלתי-תלויים של טנזור רימאן ב-D ממדים הוא

$$\frac{1}{12}D^2\left(D^2-1\right) \tag{1.18}$$

לדוגמה, במרחב-זמן דו-ממדי יש דרגת חופש בודדה ובמרחב-זמן ארבע ממדי יש 20.

את המשתנים הבלתי-תלויים של טנזור רימאן ניתן לחלק לשני טנזורים שלהם משמעות פיסיקלית וגאומטרית מוגדרת. הראשון הוא טנזור ריצ'י (Ricci) שהוא העקבה של טנזור רימן ולכן יכיל את דרגות החופש ה"סימטריות" שלו

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{1.19}$$

אם ניקח את העקבה של (1.17) נקבל $2D_\mu R^{\mu\nu} = D^\nu R = g^{\mu\nu} D_\mu R$ כאשר $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ הוא הסקלר של ריצ'י. בצורה אחרת

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.20)$$

כאשר $G^{\mu\nu}$ הוא טנזור אינשטיין $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$.

הטנזור השני הוא טנזור וייל (Weyl) המכיל את שאר דרגות החופש ה"אנטי-סימטריות" של טנזור רימאן.
עלינו לדרוש שטנזור וייל יהיה חסר עקבה ולכן ב-D ממדים נקבל

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda\sigma} + \frac{1}{D-2}\left(g_{\mu\sigma}R_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\lambda}R_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}R_{\mu\lambda}\right) + \frac{1}{(D-1)(D-2)} R\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}\right) \qquad (1.21)$$

ואכן נחשב את העקבה ונקבל:

$$g^{\mu\lambda}C_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\nu\sigma} + \frac{1}{D-2}\left(\delta^\lambda_\sigma R_{\nu\lambda} - \delta^\lambda_\lambda R_{\nu\sigma} + \delta^\mu_\nu R_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}R\right) + \frac{1}{(D-1)(D-2)} R\left(\delta^\lambda_\lambda g_{\nu\sigma} - \delta^\lambda_\sigma g_{\nu\lambda}\right)$$

נשתמש בעובדה ש- $\delta^\mu_\mu = \sum_{\mu=1}^{D} 1 = D$:

$$g^{\mu\lambda}C_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\nu\sigma} + \frac{1}{D-2}\left(R_{\nu\sigma} - DR_{\nu\sigma} + R_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}R\right) + \frac{1}{(D-1)(D-2)} R\left(ng_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\right) =$$

$$= R_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma} - \frac{1}{D-2} g_{\nu\sigma}R + \frac{1}{D-2} g_{\nu\sigma}R = 0$$

ולכן קיבלנו שהעקבה אכן מתאפסת. כל שאר העקבות האפשריות מתאפסות מסימטריה.
המשמעות של טנזור ריצ'י וטנזור וייל[6] מתבררת כאשר מנתחים תנועת גופי בוחן אן אור במרחב עקום ובודקים מה מאפיין את תנועתם וכיצד משפיעים על כך רכיבי טנזור ריצ'י וטנזור וייל. ניתן להראות שאם נשים ענן של גופי בוחן במרחב עקום, **טנזור ריצ'י קובע את שינוי הנפח של הענן, כלומר להתפשטות או התכווצות הענן ללא שינוי צורה. טנזור וייל קובע את העיוות בצורת הענן, כלומר שינוי צורת הענן ללא שינוי נפחו.**

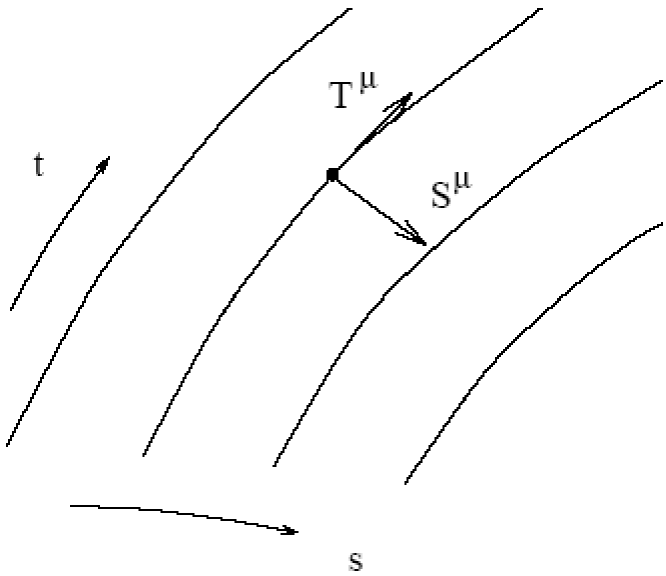
משוואת הסטייה הגאודסית

עד עתה דנו רק בתנועה של גופים במרחב עקום (קינמטיקה) ולא בכוחות (דינמיקה). הכרנו את העקומות הגאודסיות המגדירות קווים ישרים במרחב עקום וגם הראינו שלא ניתן להיעזר במטריקה ובסמלי קריסטופל המופיעים במשוואה הגיאודסית כמדד לעקמומיות המרחב. ואכן כאשר דנים בגוף בוחן יחיד אין שום דרך לדעת האם המרחב עקום או אם פועל על הגוף כוח כבידה משום שכל השפעת הכבידה מתמצית באילוץ

[6] ראו תרגיל 1.

הגוף לנוע על עקומה גיאודסית (אם פועלים כוחות אחרים הגוף ינוע על העקומה המוגדרת ע"י משוואה (1.13)). צופה אינו יודע כי המרחב העקום, יפרש את התופעה ככוח כבידה. זהו הבסיס לרעיון העמוק והמהפכני של איינשטיין המבוסס על השקילות וחוסר היכולת להבחין בין השפעת כוח הכבידה לגיאומטריה של המרחב. אם נעמיק בהגדרה של העקמומיות (1.14) נבין שהעקמומיות תלויה בהבדלים בתנועה בין מסלולים שונים. במרחב שטוח לא תיתכן תאוצה יחסית בין הצופים אך במרחב עקום התאוצה תקבע ותאפיין את עקמומיות המרחב. לכן נפנה לפתח משוואה הקובעת את התאוצה היחסית של שני גאודסים קרובים אינפינסימלית. משוואה זו מכילה את כל הדינמיקה של כוח הכבידה ולכן זוהי המשוואה הבסיסית והחשובה של תורת היחסות הכללית. בהמשך נשתמש רבות במשוואת הסטייה הגאודסית כדי להבין את השפעת הכבידה על חומר בתנאים שונים.

נדון בגופי בוחן הנעים על עקומות גאודסיות (גאודסים). נסמן את הוקטור המשיק לגאודסים ב T^{μ} ואת הוקטור המאונך ל T^{μ} נסמן ב S^{μ} (איור 1.3). S^{μ} מצביע מעקומה גאודסית אחת אל הסמוכה לה.



איור 1.3

משפחה של עקומות גאודסיות

T^{μ} מקיים את המשוואה הגאודסית לפי הגדרה מס' 1: $T^{\nu}D_{\nu}T^{\mu}=0$. כעת נוכיח כי $T^{\nu}D_{\nu}S^{\mu}=S^{\nu}D_{\nu}T^{\mu}$. זהו שוויון חשוב להמשך. הקואורדינטה λ מגדירה את המיקום לאורך הגאודסים, $T^{\mu}=\dfrac{dx^{\mu}}{d\lambda}$. נגדיר גם את הקואורדינטה κ המייצגת את מיקום הגאודסים עצמם ולכן $S^{\mu}=\dfrac{dx^{\mu}}{d\kappa}$. λ ו-κ קואורדינטות אורתוגונליות ולכן הנגזרות לפיהן חילופיות:

$$T^{\nu}D_{\nu}S^{\mu}=\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\kappa}+\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^{\rho}}{d\kappa}\right)=\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda d\kappa}+\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^{\rho}}{d\kappa}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$$

מכיוון שסמלי קריסטופל סימטריים באינדקסים התחתונים ניתן להחליפם:

$$T^\nu D_\nu S^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda d\kappa} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\kappa}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\mu}{d\kappa d\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{d\kappa}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{dx^\nu}{d\kappa}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\right) =$$
$$= S^\nu D_\nu T^\mu$$

ולכן:

$$T^\nu D_\nu S^\mu = S^\nu D_\nu T^\mu \qquad (1.22)$$

כעת נפנה לחשב את התאוצה היחסית בין שני גאודסים. כלומר עלינו לחשב את הנגזרת הקווריאנטית השניה של S^μ לאורך הגאודס:

$$\begin{aligned} a^\mu &= \left(T^\nu D_\nu\right)^2 S^\mu = T^\nu D_\nu \left(T^\lambda D_\lambda S^\mu\right) = T^\nu D_\nu \left(S^\lambda D_\lambda T^\mu\right) = \\ &= \left(D_\lambda T^\mu\right) T^\nu D_\nu S^\lambda + S^\lambda T^\nu D_\nu \left(D_\lambda T^\mu\right) = \\ &= \left(D_\lambda T^\mu\right) T^\nu D_\nu S^\lambda + S^\lambda T^\nu D_\lambda \left(D_\nu T^\mu\right) + S^\lambda T^\nu \left[D_\nu, D_\lambda\right] T^\mu = \\ &= \left(D_\lambda T^\mu\right) S^\nu D_\nu T^\lambda + S^\lambda T^\nu D_\lambda \left(D_\nu T^\mu\right) + S^\lambda T^\nu R^\mu{}_{\sigma\nu\lambda} T^\sigma = \\ &= \left(S^\nu D_\nu T^\lambda\right)\left(D_\lambda T^\mu\right) + S^\lambda D_\lambda \left(T^\nu D_\nu T^\mu\right) - \left(S^\lambda D_\lambda T^\nu\right)\left(D_\nu T^\mu\right) + S^\lambda T^\nu R^\mu{}_{\sigma\nu\lambda} T^\sigma \end{aligned}$$

כדי לקבל את השוויון השני וגם את השוויון בין השורה השלישית לרביעית נעזרנו ב (1.22). בשורה הרביעית נעזרנו בקשר (1.14) בין יחס החילוף של הנגזרות הקווריאנטיות לטנזור רימאן. בשורה האחרונה האיברים הראשון והשלישי שווים ולכן מתבטלים, האיבר השני מתאפס בגלל שמתקיים $T^\nu D_\nu T^\mu = 0$. לכן בסך הכול מצאנו:

$$a^\mu = R^\mu{}_{\sigma\nu\lambda} T^\sigma T^\nu S^\lambda \qquad (1.23)$$

זוהי משוואת הסטייה הגאודסית. כצפוי טנזור רימאן משחק בה תפקיד. **אם טנזור רימאן מתאפס אז אין תאוצה יחסית בין הגאודסים**. במילים אחרות, העקמומיות קובעת את התאוצה היחסית בין גאודסים שכנים.

תרגילים לפרק 1

1. טנזור רימאן

א. הראו במפורש כי: $\left[\nabla_\mu,\nabla_\nu\right]V^\sigma = \left(\partial_\mu\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\mu}\right)V^\rho$.

ב. הוכיחו כי $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ הוא טנזור למרות שנבנה על ידי Γ'ות.

ג. הוכיחו את זהויות ביאנקי: $\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$.

2. גאומטריה של קליפה כדורית

חשבו את הגדלים הבאים עבור קליפה כדורית ברדיוס R: $ds^2 = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2\right)$.

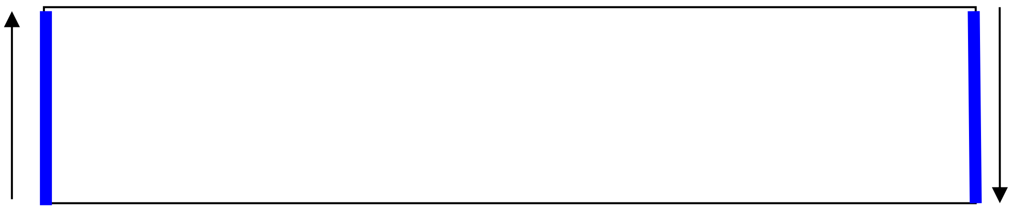
א. הטנזור המטרי, ההופכי של הטנזור המטרי, נגזרות קוואריאנטיות, טנזור רימאן, טנזור ריצ'י והסקלאר של ריצ'י.

ב. כתבו במפורש את המשוואות הגיאודסיות ופתרו אותן.

ג. כתבו במפורש את משוואות הסטייה הגיאודסיות ופתרו אותן.

3. רצועת מביוס

רצועת מביוס היא פס דו-ממדי שקצותיו מזוהים באוריינטציה הפוכה כבציור



נסו לחשב את סמלי קריסטופל לרצועת מביוס והראו כי לא ניתן למצוא סמלי קריסטופל סימטריים.

א. מתוך חישוב ההשתנות הכללית של וקטור קבוע על הרצועה חשבו את הנגזרת הקוואריאנטית שלו.

ב. מידיעת הנגזרת הקוואריאנטית חשבו את סמלי קריסטופל.

4. לכסון מטריקה ע"י בחירת קואורדינטות

נתון אלמנט אורך $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + 2a^2(t)\,dxdy + dz^2$. מצאו קואורדינטות בהן המטריקה אלכסונית.

5. מרחב רינדלר

מצאו את המטריקה של צופה מואץ במרחב-זמן שטוח. זהו מרחב רינדלר.

א. מחוק חיבור המהירויות ביחסות פרטית $v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}$ הראו כי המהירות של צופה הנע בתאוצה קבועה A נתונה ע"י $v=\tanh A\tau$

ב. חשבו את המטריקה של מרחב שטוח $ds^2=-dt^2+dz^2+dx_\perp^2$ בקואורדינטות רינדלר

$$t(\xi,\eta)=\frac{1}{a}e^{a\xi}\sinh a\eta$$
$$z(\xi,\eta)=\frac{1}{a}e^{a\xi}\cosh a\eta$$
$$\vec{x}_\perp=\vec{x}_\perp.$$

ג. ציירו את הקווים שווי ξ והקווים שווי η והראו כי הקווים שווי ξ הם קווי עולם של צופה מואץ וחשבו את תאוצתו העצמית. מהי המהירות אליה מגיע הצופה?

ד. הראו כי יש תחום במרחב-זמן ממנו לא יכולים להגיע גופים חומריים או אור אל הצופה. הסבירו את התופעה. קבעו את התחום במרחב-זמן שממנו יכול להגיע אור לצופה.

6. גיאומטריה במטריקה לא אלכסונית

נתון אלמנט אורך $ds^2=-dt^2+dx^2+2a^2(t)\,dxdy+dy^2+dz^2$

א. חשבו את הטנזור המטרי, ההופכי של הטנזור המטרי, נגזרות קוואריאנטיות, טנזור רימן, טנזור ריצ'י והסקלאר של ריצ'י.

ב. חשבו את הטנזור של וייל.

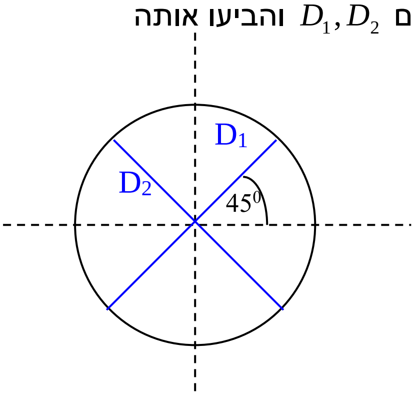
ג. כתבו במפורש את המשוואות הגיאודסיות.

7. הסקלר של ריצ'י וטנזור וייל קובעים שינוי נפח ועיוות

במטריקה של שאלה 6, מסדרים מעגל של גופי בוחן הנמצאים במנוחה בזמן $t=0$ כבציור. המעגל מוגדר על ידי $x^2+y^2\le R^2$. הגופים מתחילים לנוע (על עקומות גיאודסיות) כאשר נתון $a(0)=0$.

א. חשבו את הנגזרת השנייה של שטח המעגל $S=\int\sqrt{g^{(2)}}dxdy$ לפי הזמן, והביעו אותה באמצעות טנזור ריצ'י.

ב. חשבו את הנגזרת השנייה לפי הזמן של יחס האלכסונים D_1, D_2 והביעו אותה באמצעות טנזור וייל.



פרק 2: הפעולה של כבידה וחומר, משוואות איינשטיין

פעולת הילברט-איינשטיין

איינשטיין ניסה לקבל את משוואות הכבידה במשך זמן רב. לקראת סוף התהליך בשנת 1915 החל גם המתמטיקאי הדגול הילברט להתעניין בשאלה. איינשטיין עזר לו להבין את השאלות הפתוחות ומכיוון שהילברט ידע הרבה יותר מתמטיקה מאיינשטיין הצליח תוך זמן קצר של מספר חודשים להגיע לפתרון. למזלו של איינשטיין הוא הצליח לפרסם את הפתרון מספר שבועות לפני הילברט. מעניין מאוד לקרוא ולהבין את ההיסטוריה של פיתוח משוואות הכבידה המובאת במספר ספרים ומקורות ברשת. הפתוח שאנו נביא נעשה לראשונה ע"י הילברט תוך שימוש בעקרון הווראיאציה.

פעולת הכבידה במרחב עקום צריכה להיות גודל סקלרי ולכן אפשר לבטא אותה באופן כללי $S_G = \int F\sqrt{-g}d^4x$ כאשר F הוא סקלר כלשהו ו- $\sqrt{-g}$ $(g \equiv \det g_{\mu\nu})$ מופיע כי הוא היעקוביאן של שינוי קואורדינטות כך ש $\sqrt{-g}d^4x$ אינוואריאנטי לשינוי קואורדינטות.

כעת בכדי לברר מהי הפונקציה הסקלרית F נדרוש מספר דרישות: קודם כל ברור כי F חייבת להיות תלויה בעקמומיות, שנית נדרוש בדומה לתורות אחרות שהפעולה תהיה ליניארית בנגזרות שניות של המטריקה כך שמשוואות התנועה תכללונה לכל היותר נגזרות זמניות שניות.

תחת ההנחות הנ"ל F חייבת להיות מתכונתי לסקלר של ריצ'י R. חשוב לציין שאיברים לא ליניארים כגון R^2 ו- $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ וכו', אינם פסולים ע"י עיקרון בסיסי כלשהו. מכיוון שהתורה הניוטונית צריכה להיות קירוב של התורה עבור כבידה חלשה, אברים אלו חייבים להיות קטנים כלומר מקדמי הצימוד שלהם חייבים להיות מאוד קטנים. עבור עקמומיות גבוהה מסף מסוים אברים נוספים (אם הם קיימים) אינם זניחים ולכן תורת היחסות יכולה לאבד את תוקפה במערכות בהן העקמומיות גבוהה מאוד. במקרה זה נזדקק לתורה חדשה. בקורס זה נניח:

$$S_G = const \cdot \int R\sqrt{-g}d^4x$$

הקבוע נקבע ע"י קירוב בשדות חלשים והשוואה לכבידה ניוטונית, לא נבצע את החישוב כאן בגלל ההנחה שהוא כבר בוצע בקורס המבוא. לאחר ההשוואה נקבל את הביטוי הסופי:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x \qquad (2.1)$$

זו היא פעולת הילברט-אינשטיין.

נחשב לדוגמה את הפעולה עבור קליפה כדורית דו-ממדית בעלת רדיוס a:

$S_G = \frac{1}{16\pi G}\int \frac{2}{a^2} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{2G}$. מכאן ניתן לראות שפעולה של קליפה כדורית היא קבועה.

משוואות איינשטיין ללא חומר

כעת ניגש לעיקר ונבצע וריאציה על הפעולה בכדי לקבל את משוואות אינשטיין במרחב ריק:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G}\int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x$$

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G}\int\left(\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\right) d^4x$$

כעת עלינו לברר מהי הוריאציה של טנזור ריצ'י ושל $\sqrt{-g}$.

נזכור: $\frac{\delta g^{\rho\sigma}(x)}{\delta g^{\mu\nu}(y)} = \delta^4(x-y)\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu$

בכדי לבצע וריאציה על $\sqrt{-g}$ נוכיח קודם שעבור כל מטריצה A מתקיים:

$$\det A = \exp(Tr \ln A) \qquad (2.2)$$

בכדי להוכיח את (2.2), נוכיח אותה קודם כל בבסיס שבו A אלכסונית. בבסיס אלכסוני הנוסחה טריוויאלית, אם: $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ אזי $\det A = a_1 a_2 \ldots a_n$ בעוד ש:

$$\ln A = \begin{pmatrix} \ln a_1 & & & \\ & \ln a_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & \ln a_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exp(Tr \ln a) = \exp(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n) = a_1 a_2 \ldots a_n$$

לכן השוויון מתקיים בבסיס אלכסוני. דטרמיננט אינווריאנטי לשינוי בסיס,ולכן אם נוכיח שגם $\exp(Tr \ln A)$ אינווריאנטי לשינוי בסיס אז הוכחנו את הנוסחה (2.2). ואכן במעבר בסיס $A \to U^{-1}AU$:

$$\exp(Tr \ln \tilde{A}) = \exp(Tr \ln U^{-1}AU) = \exp(Tr(\ln U^{-1} + \ln A + \ln U)) =$$
$$= \exp(Tr(\ln U^{-1}U + \ln A)) = \exp(Tr \ln A)$$

ולכן הוכחנו את (2.2).

עכשיו לואריאציה (נסמן את מטריצת המטריקה כ-**g**):

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta\exp\left(Tr\ln\mathbf{g}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\exp\left(Tr\ln\mathbf{g}\right)\cdot Tr\delta\ln\mathbf{g}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\cdot Tr\left(\mathbf{g}^{-1}\delta\mathbf{g}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[\delta\left(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\right)-g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right]=$$

$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=D$ הוא קבוע ולכן התוצאה הסופית היא:

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.3)$$

כעת נעבור לואריאציה של טנזור ריצ'י. במערכת גאודסית[7] ניתן לראות ש:

$$\delta R_{\mu\nu}=D_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-D_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\ \Rightarrow\ g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)-D_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)=$$
$$=D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right)=D_\lambda w^\lambda$$
$$w^\lambda\equiv g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}$$

מקורס המבוא אנחנו יודעים כי $D_\lambda A^\lambda=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}A^\lambda\right)$ ולכן הגודל $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}$ הוא נגזרת שלמה ואינו תורם לואריאציה[8]. כעת נציב בואריאציה של הפעולה את (2.3) ונקבל:

$$\delta S_G=\frac{1}{16\pi G}\int\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x\ \Rightarrow$$
$$\delta S_G=0\ \Rightarrow\ R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\equiv G_{\mu\nu}=0$$

כך גזרנו את משוואות אינשטיין בריק:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=0 \qquad (2.4)$$

פעולת החומר וטנזור התנע-אנרגיה

בכדי להכליל את המשוואות למקרה שבו יש חומר, נכיר ראשית את טנזור התנע-אנרגיה.

טנזור התנע-אנרגיה מוגדר כך:

$$T_{\mu\nu}\equiv-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \qquad (2.5)$$

---

[7] מערכת שבה סמלי קריסטופל מתאפסים לוקלית.

[8] ראו תרגיל 2.

כאשר S_M היא צפיפות פעולת החומר.

לא נעמיק יותר מדי בתכונות של $T_{\mu\nu}$ אך נזכיר כמה דברים:

T_{00} היא צפיפות האנרגיה.

T_{0i} הוא שטף התנע[9].

T_{ij} הוא טנזור המאמץ והוא מכיל את הלחץ על האלכסון ומומנטים של גזירה (shear)באברים לא אלכסוניים.

את התכונות האלו קל הכי פשוט להכיר מגזירת $T_{\mu\nu}$ עבור גוף נקודתי ביחסות פרטית.

הפעולה עבור חלקיק נקודתי יחסותי היא:

$$S = -m\int d\tau \qquad (2.6)$$

ולכן נקבל:

$$T^{0\mu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{0\mu}(x(\tau))} = \frac{m}{\sqrt{-g}}\int \frac{dx^\mu}{d\tau} dx^0 \delta^4(x - x(\tau)) =$$
$$= \frac{m}{\sqrt{-g}}\int \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau}\delta^4(x - x(\tau))\, d\tau = p^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(\tau)) = \text{4-momentum density}$$

$$T^{i\mu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{i\mu}(x(\tau))} = m\int \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}\delta^4(\vec{x} - \vec{x}(\tau))\, d\tau =$$
$$= p^\mu \mathrm{v}^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(\tau)) = \text{4-momentum current}$$

ובאופן כללי

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x(\tau))} = m\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(\tau)) =$$
$$= m\, u^\mu u^\nu\, \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(\tau))$$

עבור גוף שאינו נקודתי פשוט נסכם על כל חלקיו.

עבור זורם אידיאלי (לחץ אחיד ללא מומנט גזירה) נקבל:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p\right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \qquad (2.7)$$

כאשר u היא מהירות הזורם, ρ היא צפיפות הזורם ו-p הוא הלחץ. נזכיר $u_0 = 1/\sqrt{1-\vec{\mathrm{v}}^2}, \vec{u} = u_0\vec{\mathrm{v}}$, $u = \left(u_0, \vec{u}\right)$, $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ ולכן אם הזורם במנוחה $(u^0 = 1,\ u^i = 0)$ נקבל:

[9] אינדקסים לטיניים עוברים רק על ממדי המרחב.

$$T^{\nu}_{\mu}=(\rho+p)u_{\mu}u^{\nu}+\delta^{\nu}_{\mu}p=\begin{pmatrix}-\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

זו נוסחה שתשמש אותנו רבות.

כעת נפנה למשוואות אינשטיין. מ-(2.5) נובע מידית ש:

$$\delta S_M=-\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}d^4x$$

כעת נדרוש מינימיזציה לא רק של פעולת העקמומיות אלא של כל הפעולה נקבל:

$$0=\delta S_G+\delta S_M=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{8\pi G}G_{\mu\nu}-T_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}d^4x$$

ולכן נקבל

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi GT_{\mu\nu} \qquad (2.9)$$

אלו הם משוואות אינשטיין בנוכחות חומר.

אם נפעיל על משוואות (2.9) אופרטור גזירה קווריאנטית עם צמצום ונציב את זהות ביאנקי (1.20) $D_{\mu}G^{\mu\nu}=0$ נקבל כי עקביות מחייבת את שימור טנזור התנע-אנרגיה:

$$D_{\mu}T^{\mu\nu}=0 \qquad (2.10)$$

כעת נוכיח כי אם פעולת החומר היא סקלר, אז טנזור התנע-אנרגיה נשמר.

מכיוון ש S_M סקלר, הווריאציה שלה תחת שינוי קואורדינטות מתאפסת:

$$\delta S_M=-\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}d^4x=0 \qquad (2.11)$$

כאשר הוואריאציה $\delta g^{\mu\nu}$ נובעת משינוי קואורדינטות $x^{\mu}\to\left(x^{\mu}\right)'=x^{\mu}+\varepsilon^{\mu}$. במקרה זה $g_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu}{}'(x')=g_{\mu\nu}(x)+\delta g_{\mu\nu}(x)$. את $\delta g^{\mu\nu}$ נחשב מהקשר $g_{\mu\nu}{}'(x')=g_{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}$.

מכיוון ש $\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}=\delta^{\rho}_{\mu}-\partial_{\mu}\varepsilon^{\rho}$ נובע כי $g_{\mu\nu}{}'(x')=g_{\rho\sigma}(x'-\varepsilon(x))\left(\delta^{\rho}_{\mu}-\partial_{\mu}\varepsilon^{\rho}\right)\left(\delta^{\sigma}_{\nu}-\partial_{\nu}\varepsilon^{\sigma}\right)$ ולכן

בסדר ראשון ב ε נקבל

$$\delta g_{\mu\nu}=-\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}\varepsilon^{\lambda}-g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\varepsilon^{\lambda}-g_{\lambda\nu}\partial_{\mu}\varepsilon^{\lambda} \qquad (2.12)$$

מכיוון ש $\delta g^{\mu\nu}$ הוא טנזור אנו יכולים למצוא אותו בדרך הבאה: במערכת קואורדינטות גאודסית נובע מ (2.12) כי $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\lambda}\partial_\nu \varepsilon^\lambda - g_{\lambda\nu}\partial_\mu \varepsilon^\lambda$. במערכת קואורדינטות כללית ניתן להחליף נגזרות רגילות בנגזרות קוואריאנטית

$$\delta g_{\mu\nu} = -\left(D_\nu \varepsilon_\mu + D_\mu \varepsilon_\nu\right) \qquad (2.13)$$

את (2.13) ניתן לוודא ישירות ע"י חישוב אגף ימין והשוואתו לאגף ימין של (2.12). נציב את משוואה (2.13) במשוואה (2.11) ונקבל

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \frac{1}{2}\int \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\left(D_\nu \varepsilon_\mu + D_\mu \varepsilon_\nu\right) d^4x \\ &= \int \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} D_\mu \varepsilon_\nu d^4x \\ &= \int \sqrt{-g}\left[D_\mu\left(\varepsilon_\nu T^{\mu\nu}\right) - \varepsilon_\nu D_\mu T^{\mu\nu}\right] d^4x = 0 \end{aligned}$$

כפי שראינו כבר האבר הראשון בסוגריים המרובעים הוא נגזרת שלמה ואם אין זרם נכנס או יוצא בשפתו של המרחב-זמן אבר זה מתאפס. מכיוון ש ε הוא ווקטור כלשהו המקדם שלו מתאפס כלומר משוואה (2.10) מתקיימת $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

תרגילים לפרק 2

8. כתבו במפורש את טנזור איינשטיין למטריקות הנתונות באמצעות האורכים השמורים הבאים

א. $$ds^2 = -\left(1-\frac{2G_N M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

ב. $$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, dx_i^{\,2}$$

ג. בהנחה שהמטריקות הן פתרונות של משוואת איינשטיין מצאו את טנזור התנע אנרגיה $T^{\mu\nu}$. (שימו לב כי בסעיף א' יש לחשב את $T^{\mu\nu}$ בנקודה $r=0$ בצורה מושכלת.)

ד. הראו במפורש את שימור $T^{\mu\nu}$.

9. אלקטרומגנטיות:

א. חשבו את $T^{\mu\nu}$ עבור קרינה אלקטרומגנטית.

נתון: $$S_{e.m.} = \int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

ב. חשבו את $T^{\mu\nu}$ עבור נוזל אידיאלי שמשוואת המצב שלו היא משוואת מצב של קרינה.

ג. מצאו את הקשר בין שני התיאורים שב- א' ו- ב'.

ד. הוכיחו בשני המקרים את השימור של $T^{\mu\nu}$.

10. גזרו את משוואות התנועה לכבידה עם דילאטון. הפעולה נתונה ע"י

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int e^{-\phi}\left(R + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right)\sqrt{-g}\,d^4x$$

א. גזרו את הפעולה לפי $g^{\mu\nu}$. שימו לב כי כל האברים תורמים.

ב. גזרו את הפעולה לפי ϕ .

ג. בחרו קומבינציות לינאריות פשוטות של המשוואות שמצאתם בסעיפים הקודמים.

11. טנזור התנע-אנרגיה (ת"א) של זורם אידיאלי (מותאם משאלה של דה אלויס מקולורדו)

א. הראו כי טנזור הת"א של אוסף גופים חופשיים הנעים במרחב-זמן כללי נתון על ידי

$$T^{\mu\nu} = \sum_r m_r \int d\tau_r \frac{dx_r^\mu}{d\tau_r}\frac{dx_r^\nu}{d\tau_r}\frac{1}{\sqrt{g}}\delta^4(x-x_r)$$

כאשר $x_r = x_r(\tau)$.

ב. הראו כי טנזור הת"א מסעיף א' ניתן לביטוי בצורה הבאה

$$T^{\mu\nu} = \rho(x) u^\mu(x) u^\nu(x)$$

ג. ניתן לחשב את טנזור הת"א מסעיף ב' עבור התפלגות רציפה של חומר (זורם) בעל צפיפות מסה ρ וארבע-מהירות $u^\mu(x)$, המקיימת $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$. מצאו ביטוי לטנזור הנ"ל במערכת בה לזורם ווקטור מהירות מרחבית v^i. מה המשמעות של רכיבי הטנזור?

ד. הראו כי מחוק השימור $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ נובע כי זרם המסה $j^\mu = \rho\, u^\mu$ נשמר וכי אלמנט זורם נע על עקומה גאודזית.

ה. ניתן להוסיף את ההשפעה של הלחץ באמצעות הכללתו בטנזור הת"א

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} .$$

הראו כי במערכת בה הזורם במנוחה טנזור הת"א אלכסוני ונתון ע"י המטריצה האלכסונית (ρ, p, p, p).

ו. והראו כי ממשוואת השימור נובעות המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p) \nabla^\mu u_\mu &= 0 \\ (p + \rho) u^\mu \nabla_\mu u_\nu + (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \nabla^\mu p &= 0 \end{aligned}$$

הסבירו את משמעות המשוואות ע"י לקיחת הגבול הניוטוני בו $u^\mu = (1, v^i)$, $p << \rho$ וגם $v dp/dt << |\nabla p|$.

פרק 3: משוואות גלי כבידה סביב מרחב שטוח

בפרק זה נראה שמשוואות איינשטיין בקרוב של שדה חלש סביב מרחב שטוח הן משוואות גלים. משוואות אלו משנות את תורת הכבידה של ניוטון שהיא תורה של פעולה ממרחק. לפי תורת ניוטון אם פוגע אסטרואיד בשמש פוטנציאל הכבידה שלה משתנה מיד ולכן גם כוח הכבידה שהשמש מפעילה על כדור הארץ משתנה מיד. תופעה כזו אינה אפשרית על פי תורת היחסות הפרטית מכיוון שאות פיסיקלי עבר במהירות הגדולה ממהירות האור. משוואות הגלים שנמצא יחליפו את הפעולה ממרחק בגלים הנעים במהירות האור. שינוי זה דומה לשינוי אותן משנות משוואות מקסוול את חוק קולון.

כדי למצוא את משוואות הגלים אנו חייבים להגדיר רקע: מרחב זמן שאינו משתנה. אחרת המרחב-זמן כולו דינאמי ואיננו מכירים שיטות יעילות לפתור את משוואות איינשטיין במקרה זה. זוהי אחת מבעיות היסוד הבלתי פתורות בתורת הכבידה כיום. גם תורת המיתרים מתקשה מאוד בהתמודדות עם בעיה זו.

משוואות איינשטיין ללא מקורות בקרוב שדה חלש סביב מרחב שטוח

נפתח את הטנזור המטרי סביב מרחב שטוח

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

לכן ההפכי של הטנזור המטרי הוא

$$g^{\mu\nu} = \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)^{-1} = \eta^{-1}\left(\delta + \eta^{-1}h\right)^{-1} = \eta^{-1} - \eta^{-1}\eta^{-1}h + \cdots \tag{3.2}$$

כלומר

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} + \cdots = \eta^{\mu\nu} - h^{\rho\sigma} + \cdots \tag{3.3}$$

בקרוב זה מעלים ומורידים אינדקסים באמצעות מטריקת הרקע $\eta_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$ הוא טנזור מסדר שני, וניתן לפתח את כל הטנזורים הקוואריאנטים באמצעותו ובאמצעות נגזרותיו. לפי משוואה (1.15)

$$R^{(0)}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \tag{3.4.1}$$

$$R^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}\right) \tag{3.4.2}$$

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\nu\sigma} &= g^{\mu\rho}R_{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\rho(1)}R^{(0)}_{\mu\nu\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}R^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu h^\mu{}_\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\mu - \partial_\sigma\partial_\nu h^\mu{}_\mu - \partial^\mu\partial_\mu h_{\nu\sigma}\right) \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

כדי לפשט את משוואות איינשטיין ללא מקורות ניקח את העקבה של משואה (2.4)

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=0\Rightarrow R=0\Rightarrow R_{\mu\nu}=0$$

וממשוואה (3.4.3) אנו מקבלים

$$\partial_\mu\partial_\nu h^\mu{}_\sigma+\partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\mu-\partial_\sigma\partial_\nu h-\Box h_{\nu\sigma}=0 \tag{3.5}$$

כאשר השתמשנו בסימונים $\Box\equiv\partial^\mu\partial_\mu$, $h\equiv h^\mu{}_\mu$.

החופש לבחור קואורדינטות חדשות $x^\mu\to x^{\mu\prime}(x)$ מאפשר לכפות ארבעה תנאים על המשוואה.
חופש זה נקרא גם חופש כיול בגלל דמיונו לחופש הכיול במשוואות מקסוול ונדון בו במפורט בהמשך.
בינתיים נכפה על המשוואות כיול הנקרא הכיול ההרמוני

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}=0 \tag{3.6}$$

הכיול נקרא כיול הרמוני משום שהקואורדינטות בכיול זה הן פונקציות הרמוניות $\Box x^\mu=0$,

$$\begin{aligned}\Box x^\mu&=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\left(\sqrt{-g}\,g^{\rho\sigma}\partial_\sigma\right)x^\mu=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\left(\sqrt{-g}\,g^{\rho\sigma}\delta_\sigma{}^\mu\right)\\&=-g^{\rho\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{3.7}$$

על הקורא לוודא את נכונות משוואה (3.7). בקרוב שדה חלש הכיול ההרמוני הוא

$$g^{\mu\nu(0)}\Gamma^{\rho\ (1)}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu h_{\lambda\nu}+\partial_\nu h_{\mu\lambda}-\partial_\lambda h_{\mu\nu}\right)=0 \tag{3.8}$$

כלומר

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda-\frac{1}{2}\partial_\lambda h=0 \tag{3.9}$$

כעת נגדיר

$$\bar{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h=0 \tag{3.10}$$

ונראה שהוא רחבי $\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu}=0$ בכיול ההרמוני, ואכן

$$\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu}=\partial^\mu h_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}\partial_\nu h=0 \tag{3.11}$$

משוואה (3.5) הופכת למשוואה פשוטה בהרבה בכיול (3.9). ראשית נכתוב מחדש את אגף שמאל של משוואה (3.5)

$$\begin{aligned}\partial_\mu\partial_\nu h^\mu{}_\sigma+\partial_\sigma\partial_\mu h_\nu^\mu-\partial_\sigma\partial_\nu h-\Box h_{\nu\sigma}&=\partial_\nu\left(\partial_\mu h^\mu{}_\sigma\right)-\frac{1}{2}\partial_\nu\left(\partial_\sigma h\right)+\partial_\sigma\left(\partial_\mu h^\mu{}_\nu\right)-\frac{1}{2}\partial_\sigma\left(\partial_\nu h\right)-\Box h_{\nu\sigma}\\&=\partial_\nu\left(\partial_\mu h^\mu{}_\sigma\frac{1}{2}\partial_\sigma h\right)+\partial_\sigma\left(\partial_\mu h^\mu{}_\nu-\frac{1}{2}\partial_\nu h\right)-\Box h_{\nu\sigma}\end{aligned}$$

ולכן בכיול (3.9) משוואות איינשטין (3.5) הופכות ל $\Box h_{\nu\sigma}=0$. אם $\Box h_{\nu\sigma}=0$ אז גם העקבה h מקיימת $\Box h=0$ ולכן גם $\Box\left(h_{\nu\sigma}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right)=0$. בסופו של דבר

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu}=0 \qquad (3.12)$$

זוהי משוואת גלים!

$$\left(-\partial_t^2+c^2\nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu}(t,\vec{x})=0 \qquad (3.13)$$

משוואת הגלים היא משוואה עבור הסטייה $\bar{h}_{\mu\nu}$ ממרחב שטוח ולכן שונה מכל משוואות הגלים שהכרנו עד כה. בדרך כלל יש תווך בו מתקדם הגל. במקרה בו אנו דנים אין תווך אלא המרחב-זמן עצמו משמש גם כתווך והוא גם הגל.

משוואות גלי כבידה ללא מקורות

משוואות גלי הכבידה אותן עלינו לפתור הן

$$\begin{aligned}\Box\bar{h}_{\mu\nu}&=0\\ \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu}&=0\end{aligned} \qquad (3.14)$$

מכיוון ש $\bar{h}_{\mu\nu}$ היא מטריצה סימטרית היא מכילה 10 משתנים בלתי תלויים (כאשר D=4). אילוצי הכיול מטילים 4 תנאים נוספים ולכן בסך הכול אנו נותרים עם 6 משתנים בלתי תלויים. אך פתרון משוואת גלי הכבידה טומן בחובו הפתעה קטנה. למשוואות (3.14) חופש כיול נוסף המאפשר לקבוע עוד 4 דרגות חופש כך שבסך הכול ל $\bar{h}_{\mu\nu}$ שני קיטובים בלתי תלויים. חופש כיול נוסף זה דומה לחופש הכיול הנוסף של משוואות מקסוול הגורם לכך שלפוטנציאל הוקטורי בארבעה ממדים יש רק שני קיטובים בלתי תלויים ולא שלושה.

וכעת לפתרון. את משוואות (3.14) כדאי לפתור במרחב התנע $\bar{h}_{\mu\nu}=C_{\mu\nu}e^{ik_\rho x^\rho}$ כאשר $k^\mu=\left(\omega,\vec{k}\right)$.

משוואות (3.14) הופכות למשוואות אלגבריות

$$\begin{aligned}k^2=-\omega^2+\vec{k}^2&=0\\ k^\mu C_{\mu\nu}&=0\end{aligned} \qquad (3.15)$$

במשוואות (3.15) מוסתר חופש כיול נוסף כאשר $k^2=0$: $x^\mu\to x^{\mu\prime}(x)=x^\mu+\xi^\mu$ בתנאי ש $\Box\xi^\mu=0$. במרחב התנע $\xi_\mu=B_\mu e^{ik_\rho x^\rho}$ ולכן הדרישה היא ש

$$k^2B_\mu=0 \qquad (3.16)$$

אם אכן כך הדבר הרי שמצאנו עוד 4 תנאים על $\bar{h}_{\mu\nu}$ כפי שהובטח.

כעת נחשוף במפורש את חופש הכיול

$$\partial^{\mu} C_{\mu\nu} e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})} = C_{\mu\nu}\left(\partial^{\mu} e^{ik_{\rho}x^{\rho}}\, e^{ik_{\rho}\xi^{\rho}} + e^{ik_{\rho}x^{\rho}}\partial^{\mu} e^{ik_{\rho}\zeta^{\rho}}\right)$$
$$= iC_{\mu\nu}\left(k^{\mu} + k_{\rho}\partial^{\mu}\xi^{\rho}\right) e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}$$
$$= iC_{\mu\nu} e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}\left[k^{\mu} + k_{\rho}\partial^{\mu}\left(B^{\rho} e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}\right)\right] \tag{3.17}$$
$$= iC_{\mu\nu} e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}\left[k^{\mu} + ik_{\rho}B^{\rho}k^{\mu} e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}\right]$$
$$= ik^{\mu} C_{\mu\nu} e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}\left[1 + ik_{\rho}B^{\rho} e^{ik_{\rho}x^{\rho}}\right] = 0$$

וגם

$$\Box C_{\mu\nu} e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})} = C_{\mu\nu}\partial_{\sigma}\left(\partial^{\sigma} e^{ik_{\rho}x^{\rho}}\, e^{ik_{\rho}\xi^{\rho}} + e^{ik_{\rho}x^{\rho}}\partial^{\sigma} e^{ik_{\rho}\zeta^{\rho}}\right)$$
$$= C_{\mu\nu}\partial_{\sigma}\left[\left(ik^{\sigma} + ik_{\rho}\partial^{\sigma}\xi^{\rho}\right) e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}\right]$$
$$= C_{\mu\nu}\partial_{\sigma}\left[\left(ik^{\sigma} - k_{\rho}B^{\rho}k^{\sigma} e^{ik_{\lambda}x^{\lambda}}\right) e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}\right] \tag{3.18}$$
$$= C_{\mu\nu} e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}\left[\left(ik^{\sigma} - k_{\rho}B^{\rho}k^{\sigma} e^{ik_{\lambda}x^{\lambda}}\right)\left(ik_{\sigma} - k_{\rho}B^{\rho}k_{\sigma} e^{ik_{\lambda}x^{\lambda}}\right) - ik_{\rho}B^{\rho}k^{\sigma}k_{\sigma} e^{ik_{\lambda}x^{\lambda}}\right]$$
$$= C_{\mu\nu} e^{ik_{\rho}(x^{\rho}+\xi^{\rho})}\left[k^{2}\left(i - k_{\rho}B^{\rho} e^{ik_{\lambda}x^{\lambda}}\right)\left(i - k_{\rho}B^{\rho} e^{ik_{\lambda}x^{\lambda}}\right) - ik^{2}k_{\rho}B^{\rho} e^{ik_{\lambda}x^{\lambda}}\right] = 0$$

כאשר השוויון האחרון נובע ממשואה (3.16).

נראה כעת כי על ידי בחירה מתאימה של B_{μ} נוכל להסיר את העקבה ואת המרכיבים הזמניים של $C_{\mu\nu}$,

כלומר שנוכל למצוא $C_{\mu\nu} \to \tilde{C}_{\mu\nu}$ כך ש $\tilde{C}^{\mu}_{\mu} = 0$ ו $\tilde{C}_{0\mu} = 0$.

נזכור שכאשר $x^{\mu} \to \left(x^{\mu}\right)' = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ לפי משוואה (2.12) $\delta g_{\mu\nu} = -\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}\xi^{\lambda} - g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\xi^{\lambda} - g_{\lambda\nu}\partial_{\mu}\xi^{\lambda}$

, ובקרוב המוליך סביב מרחב שטוח $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\xi^{\lambda} - g_{\lambda\nu}\partial_{\mu}\xi^{\lambda}$, כלומר

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} \tag{3.19}$$

ולכן

$$\bar{\tilde{h}}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\tilde{h} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} + \eta_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\xi^{\lambda} \tag{3.20}$$

מטריצת הקיטוב משתנה

$$(3.21)\quad \tilde{C}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} - ik_\mu B_\nu - ik_\nu B_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\lambda B^\lambda$$

ועקבתה משתנה בהתאם

$$(3.22)\quad \tilde{C}^\mu_{\ \mu} = C^\mu_{\ \ \mu} + 2ik_\lambda B^\lambda$$

ולכן אם נדרוש

$$(3.23)\quad k_\lambda B^\lambda = \frac{i}{2} C^\mu_{\ \ \mu}$$

נקבל כי $\tilde{C}^\mu_{\ \mu} = 0$ כנדרש.

נפנה לרכיבים $\tilde{C}_{0\mu}$. ראשית $\tilde{C}_{00} = C_{00} - 2ik_0 B_0 - ik_\lambda B^\lambda$ ולכן ממשוואה (3.23) נקבל

$$(3.24)\quad \tilde{C}_{00} = C_{00} - 2ik_0 B_0 + \frac{1}{2} C^\mu_{\ \ \mu}$$

אם נבחר

$$(3.25)\quad B_0 = -\frac{i}{2k_0} C_{00} + \frac{1}{2} C^\mu_{\ \ \mu}$$

נקבל את התוצאה המבוקשת $\tilde{C}_{00} = 0$. בהמשך

$$(3.26)\quad \begin{aligned} \tilde{C}_{0j} &= C_{0j} - ik_0 B_j - ik_j B_0 \\ &= C_{0j} - ik_0 B_j - ik_j \left(-\frac{i}{2k_0} C_{00} + \frac{1}{2} C^\mu_{\ \ \mu} \right) \end{aligned}$$

אם נבחר

$$(3.27)\quad \tilde{C}_{0j} = B_j - \frac{i}{k_0} C_{0j} + i \frac{k_j}{2k_0^2} \left(C_{00} + \frac{1}{2} C^\mu_{\ \ \mu} \right)$$

נקבל כי גם $j = 1,2,3 \quad \tilde{C}_{0j} = 0,$ ולכן בסך הכול $\tilde{C}_{0\nu} = 0$ כמובטח ומספר המשתנים הבלתי תלויים במטריצת הקיטוב $\tilde{C}_{\mu\nu}$ בסופו של דבר הוא רק 2 ולא 10 כמספר ההתחלתי או 10-4=6 לאחר הטלת תנאי הכיול הראשוני. בכיול זה ניתן לבחור רק בריק והוא נקרא כיול רחבי חסר עקבה (TT) בכיול זה $\bar{h}_{\mu\nu}{}^{TT} = h_{\mu\nu}{}^{TT}$.

פתרון משוואות גלי כבידה ללא מקורות

נבחר ללא הגבלת הכלליות גל כבידה בכיול TT המתקדם בכיוון ציר z, כלומר $\vec{k}=\left(0,0,k_z\right)$. אנו רוצים לפתור את משוואות (3.15). ראשית נכפה את התנאי $k^2=0$: $k^{\mu}=\left(\omega,0,0,\omega\right)$. שנית $k^{\mu}C_{\mu\nu}=-\omega C_{0\nu}+wC_{3\nu}=0$. מכיוון ש $C_{0\nu}=0$ אנו למדים שגם $C_{3\nu}=0$. עד כה קיבלנו

$$C_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.28)$$

מסיבות שיתבררו בהמשך נסמן $C_{11}\equiv C_{+}$ ו $C_{12}\equiv C_{\times}$ ולכן בכיול TT

$$C_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{+} & C_{\times} & 0 \\ 0 & C_{\times} & -C_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

מכיוון שמשוואות הגלים הן לינאריות אפשר לכתוב את פתרונן הכללי

$$\begin{aligned} &\bar{h}_{\mu\nu}{}^{TT}=C_{+}e^{ik_{\rho}x^{\rho}}+C_{\times}e^{ik_{\rho}x^{\rho}} \\ &k^2=0 \end{aligned} \qquad (3.29)$$

פרק 4: מקורות של גלי כבידה