תרגול 11

גדעון אילני

נושאי התרגול

1. סגירת קצוות/חזרה
2. כוחות מדומים

1 סגירת קצוות

נפתור את שאלה 4 מתרגיל בית 10:

סוגרי פואסון של חלקיק חופשי עם הסביבה

א. $[L,H]$

ב. $[S(r,t),H]$

ג. $[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}+\alpha\hat{r},H]$

כאשר: H הוא ההמילטוניאן L הלגראנג'יאן, S הפעולה , $S(r,t)\equiv S(r_0,t_0,r,t)$ $\boldsymbol{v}$ מהירות החלקיק, $\boldsymbol{M}$ התנע הזוויתי ו- α קבוע.

יש לבטא את התשובות ללא נגזרות.

פתרון

א. עבור חלקיק חופשי מתקיים:

$$L=H=\frac{p^2}{2m}$$

ומכאן ש:

$$[L,H]=[H,H]=0.$$

ב.

אפשר לחשוב על הפעולה כפונקציה יוצרת של טרנספורמציה קנונית, ואז,

$$[S,H]=\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}=\sum_i p_i\frac{p_i}{m}=\frac{p^2}{m},$$

או לחלופין להשתמש בקשר בין סוגרי הפואסון עם ההמילטוניאן, לנגזרת בזמן (ושוב להשתמש בכך ש$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$)

$$[S,H] = \frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial t} = L + H = \frac{p^2}{m.}$$

ג.

בעצם הגודל שנמצא בצד שמאל של סוגרי הפואסון, זה וקטור לנץ (עד כדי חלוקה במסה)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{M} - \alpha \hat{r},$$

מכיוון שוקטור זה הוא קבוע תנועה עבור פוטנציאל קפלרי אנחנו יודעים כי מתקיים

$$\dot{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A}, H_{\text{kep}}] = \left[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{M} - \alpha \hat{r}, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{\alpha}{r}\right] = 0.$$

אז אם ניקח $\alpha = 0$ נקבל

$$\left[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{M}, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right] = 0.$$

ונשאר לנו לחשב את

$$[\alpha \hat{r}, H] = \alpha \dot{\hat{r}} = \alpha \left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \boldsymbol{r}\frac{(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})}{r^3}\right] = \alpha \left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \boldsymbol{r}\frac{(\hat{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})}{r^2}\right] = \frac{\alpha}{mr}\left(\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p} \cdot \hat{r})\,\hat{r}\right)$$

נפתור בעיה משבוע שעבר ב3 סוגי הפורמליזמים שלמדנו:

חלקיק מחליק על שפת קונוס:

אוילר-לגראנג':

משתנה בת"ל - t, משתנים תלויים $\{q_i\}$, משוואות: N משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר שני.

נכתוב את הלגראנג'יאן בקואורדינטות גליליות, כאשר יש לנו אילוץ $r/z = \tan(\alpha_0)$, הולונומי. הלגראנג'יאן יהיה

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz,$$

נגדיר $\varepsilon \equiv 1/\tan\alpha_0$, ואז

$$z = \varepsilon r,$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(1+\varepsilon^2\right) + r^2\dot{\phi}^2\right) - mg\varepsilon r.$$

איך נמשיך מכאן? אפשר להשתמש במשוואות $E - L$. אבל אפשר עדיף להשתמש בקבועי התנועה -

- האנרגיה: $T = T_2$ וכן אין תלות מפורשת בזמן, לכן

$$E = H = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(1+\varepsilon^2\right) + r^2\dot{\phi}^2\right) + mg\varepsilon r,$$

- ϕ קואורדינטה ציקלית

$$p_\phi = \text{const} = mr^2\dot{\phi} \implies \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2},$$

עכשיו אפשר לפתור כמו בעיית כח מרכזי. נגדיר $M = m\left(1+\varepsilon^2\right)$, ו-$V_{\text{eff}}\left(r\right) = \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + mg\varepsilon r$

$$E = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}\left(r\right).$$

עכשיו נוכל כרגיל למצוא את $t\left(r\right)$

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{M}\left(E - V_{\text{eff}}\left(r\right)\right)}}dr,$$

אחר כך נוכל להציב את $r\left(t\right)$ בנוסחה של $\dot{\phi}$ ולמצוא את $\phi\left(t\right)$ ואת $\phi\left(r\right)$.

המילטון:

משתנה בת"ל - t, משתנים תלויים $\{q_i, p_i\}$, משוואות: $2N$ משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון.

נמצא את התנעים הצמודים ואת ההמילטוניאן

$$H\left(r,\phi,p_r,p_\phi\right) = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L,$$

$$p_r = m\dot{r}\left(1+\varepsilon^2\right) \implies \dot{r} = \frac{p_r}{m\left(1+\varepsilon^2\right)},$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m\left(1+\varepsilon^2\right)} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + mg\varepsilon r.$$

עכשיו נשתמש במשוואות המילטון

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m\left(1+\varepsilon^2\right)},\quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - mg\varepsilon,$$

$$\dot{\phi}=\frac{\partial H}{\partial p_\phi}=\frac{p_\phi}{mr^2},\ \dot{p}_\phi=-\frac{\partial H}{\partial \phi}=0.$$

בשביל לפתור עבור $r\left(t\right)$ נגזור את המשוואה עבור $\dot{r}$ ונציב את המשוואה של $\dot{p}_r$ ונקבל

$$\ddot{r}=\frac{\dot{p}_r}{m\left(1+\varepsilon^2\right)}=\frac{1}{m\left(1+\varepsilon^2\right)}\left[\frac{p_\phi^2}{mr^3}-mg\varepsilon\right],$$

$$\ddot{r}=\frac{1}{m\left(1+\varepsilon^2\right)}\left[\frac{p_\phi^2}{mr^3}-mg\varepsilon\right].$$

המילטון יעקובי:

משתנה בת"ל - $\{q_i\}$, t, משתנה תלוי S, משוואות: משוואה דיפרנציאליות חלקית אחת מסדר ראשון (ב$N+1$ משתנים).

נחפש S כזו שתיתן לנו $K=0$,

$$H+\frac{\partial S}{\partial t}=0,$$

כאשר

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i.$$

אז משוואת המילטון יעקובי במקרה הזה היא

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2}{2m\left(1+\varepsilon^2\right)}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2}{2mr^2}+mg\varepsilon r+\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

איך אפשר לפתור אותה? על ידי הפרדת משתנים. נניח שקיים פתרון לS מהצורה

$$S\left(r,\phi,t\right)=R\left(r\right)+\Phi\left(\phi\right)+T\left(t\right),$$

ונציב במשוואה, נקבל

$$\frac{\left(R'\right)^2}{2m\left(1+\varepsilon^2\right)}+\frac{\left(\Phi'\right)^2}{2mr^2}+mg\varepsilon r=-T'.$$

מכיוון שאגף שמאל לא תלוי בכלל בt ואגף ימין תלוי רק בt חייב להיות נכון ש

$$-T'\left(t\right)=\text{const}=\alpha_1\implies T\left(t\right)=-\alpha_1 t.$$

נציב את זה במשוואה ונמשיך להפריד משתנים

$$\left(\Phi'\right)^2=2mr^2\alpha_1-2m^2g\varepsilon r^3-\frac{r^2\left(R'\right)^2}{\left(1+\varepsilon^2\right)},$$

כך שנקבל

$$\Phi\left(\phi\right)=\alpha_2\phi.$$

ונשארנו עם משואה עבור R

$$R\left(r\right)=\sqrt{1+\varepsilon^2}\int\frac{\sqrt{2m\alpha_1r^2-2m^2g\varepsilon r^3-\alpha_2^2}}{r}dr,$$

אז עכשיו בעצם מצאנו את S (עד כדי אינטגרל שלא עשינו עדיין). מכאן אפשר למצוא את משוואות התנועה שיגדירו לנו את הβות

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}=m\sqrt{1+\varepsilon^2}\int\frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1-2m^2g\varepsilon r-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr-t\implies r\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,t\right),$$

$$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}=\phi-\alpha_2\sqrt{1+\varepsilon^2}\int\frac{1}{r^2\sqrt{2m\alpha_1-2m^2g\varepsilon r-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr\implies\phi\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,r\right),$$

$$\implies\phi\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,t\right)$$

אחרי שנחשב את האינטגרלים נוכל בעיקרון להפוך את הקשר ולפתור לגמרי עבור התפתחות המערכת בזמן.

2 כוחות מדומים במערכת מסתובבת

קשר בין נגזרת במערכת קבועה, לנגזרת במערכת מסתובבת **כאשר ראשית הצירים באותו מקום:**

$$\frac{d}{dt}|_{fix}=\left[\frac{d}{dt}|_{rot}+\boldsymbol{\omega}\times\right]$$

אם נפעיל פעמיים על וקטור המיקום נקבל

$$\boldsymbol{a}_{fix}=\left[\frac{d}{dt}|_{rot}+\boldsymbol{\omega}\times\right]\left(\frac{d}{dt}|_{rot}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)=\boldsymbol{a}_{rot}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right).$$

במערכת המסתובבת התאוצות הנוספות יתפרשו ככוחות מדומים.

שאלה - מגדל פיזה (דוגמא ב H&F)

1. מורידים משקולת תלויה על חוט ממגדל פיזה, באיזה זווית ביחס לכיוון הרדיאלי החוט יהיה מתוח?
2. עכשיו זורקים כדור כבד מהמגדל, בהזנחת השפעת החיכוך מהאוויר, באיזה מרחק ביחס למשקולת על חוט הוא ינחת?

פתרון

1. נבנה מערכת צירים שראשיתה במרכז כדור הארץ וציר הz שלה מקביל לכיוון הרדיאלי. נבחר את ציר y כך שיהיה בכיוון צפון וציר x בכיוון מזרח. המיקום של מגדל פיזה בקואורדינטות אלו הוא $(0,0,R)$, כאשר $R=6.37\times10^6\mathrm{m}$ זה רדיוס כדו"א. וקטור המהירות הזוויתית של כדור הארץ הוא

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\left(0,\cos\lambda,\sin\lambda\right)$$

כאשר λ זו הזווית מקו המשווה, ונקרב אותה כ$\lambda=45°$. הכוחות שפועלים על המשקולת הם כוח המשיכה $-mg\hat{z}$, והכח הצנטרפוגלי

$$-m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)=-m\boldsymbol{\omega}\times\left(-\omega R\cos\lambda\hat{x}\right)=m\omega^2R\left(\cos^2\lambda\hat{z}-\sin\lambda\cos\lambda\hat{y}\right)$$

החוט יאזן את הכוחות כך שייווצר שיווי משקל. מכאן

$$\tan\theta_{\mathrm{def}}=\frac{T_y}{T_x}=\frac{\omega^2R\cos\lambda\sin\lambda}{g-\omega^2R\cos^2\lambda}\simeq\frac{\omega^2R}{g}\cos\lambda\sin\lambda\simeq0.0017.$$

את הקירוב אפשר להצדיק אינטואיטיבית: אנחנו בהחלט מושפעים מכח המשיכה, וההשפעה של הכח הצנטרפוגלי היא זניחה ביחס אליו. אפשר כמובן להכניס מספרים ולבדוק שהקירוב נכון. המרחק מהכיוון הרדיאלי אליו תצביע המשקולת הוא:

$$\omega=\frac{2\pi}{\mathrm{day}}\simeq7.3\times10^{-5}\mathrm{s}^{-1}.$$

$$h\,\theta_{\mathrm{def}}\simeq0.086\ \mathrm{m}\simeq8.6\mathrm{cm}.$$

2. בשביל פיתרון מלא צריך לפתור את המשוואות כולל כח צנטרפוגלי וקורילויס,

$$\dot{\boldsymbol{v}}=-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)-g\hat{z}=$$

$$\begin{array}{rcl}\dot{v}_x&=&-2\omega\left(v_z\cos\lambda-v_y\sin\lambda\right)\\ \dot{v}_y&=&-2\omega\left(v_x\sin\lambda\right)-\omega^2R\sin\lambda\cos\lambda\\ \dot{v}_z&=&2\omega\left(v_x\cos\lambda\right)-g+\omega^2R\cos^2\lambda\end{array},$$

אבל אנחנו יודעים שההשפעה תהיה קטנטנה, אז במקום להסתבך נקרב... נכתוב את הפתרון כטורים

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^{(0)}+\boldsymbol{v}^{(1)}+\ldots,$$

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}^{(0)} + \Delta \boldsymbol{r}^{(1)} + \ldots,$$

ונפתור בצורה איטרטיבית. נעביר את ראשית הצירים למקום אליו מצביעה המשקולת הנייחת. תחילה נניח כי אין כח קוריוליס בכלל, ונזניח גם את השפעת הכח הצנטרפוגלי על המהירות. כך שבקירוב הזה המהירות היא רדיאלית

$$\boldsymbol{v}^{(0)} \simeq -gt\hat{z},$$

עכשיו אפשר לחשב את כח קוריוליס בקירוב הזה

$$\boldsymbol{F}^{(0)}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^{(0)} \simeq 2m\omega gt \cos\lambda\hat{x},$$

נחשב את המתקף ונחלק במסה בשביל לקבל את השינוי במהירות בקירוב הראשון

$$\boldsymbol{v}^{(1)} \simeq \frac{\boldsymbol{J}^{(0)}_{\text{cor}}}{m} \simeq \omega g t^2 \cos\lambda\hat{x},$$

נעשה על זה אינטגרל בשביל לקבל את ההזזה בקירוב הראשון $\left(\Delta\boldsymbol{r}^{(0)} \equiv 0\right)$:

$$\Delta \boldsymbol{r}^{(1)} \simeq \omega g \frac{t^3}{3} \cos\lambda\hat{x}.$$

את זמן התעופה של הכדור אפשר לקבל בקירוב מהקשר

$$h = \frac{1}{2} g T^2 \implies T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 3.2\,\text{s},$$

ואז המרחק מהמשקולת יהיה

$$\Delta \boldsymbol{r}^{(1)} \simeq 5.5\,\text{mm}.$$

אם ניקח עוד איברים בטור נקבל תיקונים קטנים עוד יותר.