

תאריך הבחינה: 29/01/2021  
שם המרצה: מיכאל לובלינסקי  
שם המתרגל: יותם שרף  
שם הקורס: תורת הכבידה 1  
מספר הקורס: 203-2-4181  
שנה: 2020 סמסטר: א' מועד: א'  
משך הבחינה: 4 שעות  
חומר עזר: דף נוסחאות מצורף

## בהצלחה

### 1. גלי כבידה (35 נק')

ידוע כי הודות לפליטת גלי הכבידה, במערכת בינארית מסתובבת הכוכבים מתקרבים אחד לשני במסלול דמוי ספירלה. המערכת אותה נבחן מורכבת משתי מסות  $M, \mu$  ( $M > \mu$ ) המופרדות במרחק  $R(t)$ . הניחו  $R \gg M$  ועבדו במערכת ייחוס שבה הגוף  $M$  נמצא במנוחה והגוף  $\mu$  מסתובב סביבו במסלול מעגלי. לשם פשטות הניחו שניתן לתאר את תנועת המערכת כאוסף של מסלולים מעגליים. מצאו את התלות הזמנית של רדיוס המסלולים  $R(t)$  ואת התלות הזמנית של תדירות הסיבוב  $\omega(t)$ . מה המרחק המינימלי  $R^*$  בו ניתן להשתמש בקירוב של מסלול מעגלי? מה הקשר של מרחק זה לפוטנציאל האפקטיבי?

**בנוס (15 נק')**: מצאו ביטוי לכמות האנרגיה הכוללת הנפלטת במהלך התנועה עד המרחק  $R^*$  אותו מצאתם, הסבירו.

### 2. מרחב דה-סיטר (de Sitter space) (36 נק')

עבור יקום הומוגני ואיזוטרופי הנשלט על-ידי אנרגיית ואקום (קבוע קוסמולוגי)

א. מצאו את מטריקת פרידמן-רוברטסון-וולקר (flat FRW) בהצגה המרחבית של יקום שטוח ( $k=0$ ).

ב. מצאו מערכת קוארדינטות בה המטריקה מסעיף א' היא סטטית ואלכסונית.

נקרא למטריקה זו מרחב דה-סיטר.

ג. האם למרחב זה יש סינגולריות? אם כן, האם זו סינגולריות אמיתית או סינגולריות של הקוארדינטות? הסבירו. האם למרחב זה יש אופק? הסבירו.

ד. חשבו וציירו את הגיאודזות דמויות האור של מרחב דה-סיטר.

**בנוס (20 נק')**: חשבו את ההסחה הקוסמולוגית לאדום בין צופה למקור (כוכב הפולט אור) סטטיים

במטריקת FRW.

### 3. בריחת חללית מחור שחור (35 נק')

חללית במסה  $m$  נמצאת סטטית ברדיוס  $R$  מחוץ לחור שחור במסה  $M$ . כדי לברוח לאינסוף ולהגיע למהירות הבריחה הנדרשת, על החללית לפלוט חלק מהמסה שלה (נסמן את המסה הנפלטת  $m_e$ ). מצאו את הקשר בין המסה הנפלטת  $m_e$  למסה של החללית המגיעה לאינסוף (נסמן את מסת החללית הבורחת לאינסוף ב-  $m_i$ ).

**בונוס (15 נק')**: מצאו את מסת המנוחה המינימלית הנפלטת  $m_e$  עבורה החללית תגיע לאינסוף. עבור  $m_e$  שמצאתם, מצאו את  $m_i$ , מה קורה בגבול  $R \rightarrow 2M$  ?



## מטריקת שורצשילד

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

סימני קריסטופל

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{GM}{r^3}(r - 2GM) & \Gamma_{11}^1 &= \frac{-GM}{r(r-2GM)} & \Gamma_{01}^0 &= \frac{-GM}{r(r-2GM)} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^1 &= -(r - 2GM) & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^1 &= -(r - 2GM) \sin^2 \theta & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

## קוסמולוגיה

משוואת פרידמן הראשונה ( עם קבוע קוסמולוגי  $\Lambda$  )

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

משוואת פרידמן השנייה

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\square x^\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$
$$\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu = 0, \quad \bar{h} = 0$$

נוסחאת קוואדרופול

$$\bar{h}_{ij}(t, r) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}(t, r)$$

מומנט קוואדרופול (חסר עקבה)

$$\bar{I}_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}I_k^k$$

$$I_{ij}(t, r) = \int d^3x \rho(t, r) x_i x_j$$

הספק הקרינה בגלי כבידה

$$P_{GW} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{\bar{I}}_{ij} \ddot{\bar{I}}_{ij} \rangle$$