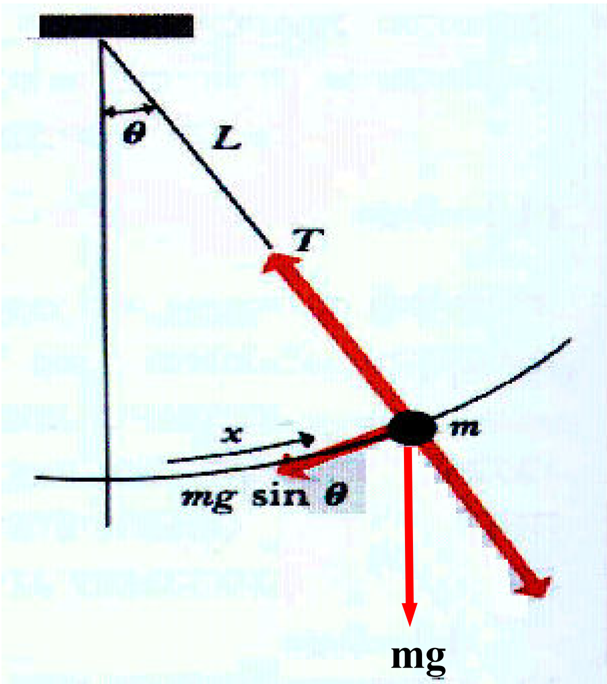
1.2 המטוטלת המתימטית

המונח מטוטלת מתמטית מתייחס למסה m הקשורה לחוט דק חסר משקל באורך L, והמסוגלת לבצע תנודות מעגליות קטנות במישור. מצב שיווי המשקל הינו המצב בו המשקולת נמצאת בנקודה הנמוכה ביותר. נסמן את הסטייה הזוויתית ממצב שיווי המשקל באמצעות הזווית θ, אורך המסלול (האורך של הקשת) Lθ. ראה איור- 2



איור 2 : מטוטלת מתמטית והכוחות שפועלים עליה

הכוחות הפועלים על המסה הם הכוח הגרביטציוני mg וכוח המתיחות במוט T. הכוח המופעל ע״י המוט מאונך לכיוון תנועת המסה ולכן לא משפיע על התנועה, רכיב הכוח הגרביטציוני בכיוון התנועה הוא: $-mg\sin\vartheta$. העתק הוא $x = L\vartheta$ (ϑ נמדדת ברדיינים) משוואת התנועה עבור המטוטלת :

$$m\ddot{x} = mL\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta \qquad (7)$$

הגודל $L\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}$ הוא התאוצה ההיקפית.

באופן כללי התנודה שמבצעת המסה אינה תנודה הרמונית, ותיאור התנודה הוא מורכב יותר. אך אם התנודות הן קטנות התנודה תהיה בקירוב טוב תנועה הרמונית.

א- תנודות קטנות:

אם נניח שהמטוטלת מתנודדת בתנודות קטנות, נוכל להשתמש בקירוב $\sin\vartheta \approx \vartheta$.
נציב זאת במשוואה (7) ונקבל:

$$m\ddot{x} = mL\ddot{\vartheta} = -mg\vartheta \rightarrow \ddot{\vartheta} + \frac{g}{L}\vartheta = 0 \qquad (8)$$

והתנודה מתוארת במשוואה הדומה למשוואה (2) כאשר, תדר התנודה הוא $\omega^2 = \frac{g}{L}$. שים לב לכך שהתדר אינו תלוי במסה ולא באמפליטודת התנודות, הוא תלוי רק באורך המטוטלת L (שעון מטוטלת).

ב-תנודות גדולות:

כאשר התנודות הן גדולות, התנועה אינה הרמונית אך בכל זאת יש לנו תנועה מחזורית. במקרה כזה ניתן למדוד את זמן המחזור של התנודות. בניגוד לתנודות קטנות, כאן זמן המחזור תלוי באמפליטודה ואינו קבוע.

ג- פתרונות נוספים:

למשוואת המטוטלת קיימים פתרונות נוספים לא הרמוניים. לדוגמה תנועה מעגלית בה המטוטלת מבצעת סיבובים ומסתובבת כל הזמן באותו כיוון. תנועת ה"סוליטון" בה המשקולת מתחילה בשיא הגובה, מבצעת סיבוב אחד ונעצרת שוב בשיא הגובה (כאשר ישנו מוט במקום חוט), משך הסוליטון הוא אינסופי.

אופי הפתרון נקבע על פי תנאי ההתחלה, כלומר, המיקום והמהירות ההתחלתיים יקבעו האם הפתרון יהיה הרמוני או סיבובי ומה האמפליטודה וכד'.