

אלסטיות

מילות מפתח:

אלסטיות, פלסטיות, מאמץ (stress), מעוות (strain), דפורמציה, חוק הוק, מודול יאנג, מודול גזירה

הציוד הדרוש: מד דפורמציה $10/0.01\text{mm}$, פסי מתכת מחומרים שונים, מעמדים עם מוטות, מוט תמיכה, סרגל, מתלים ומשקולות של 10 ו-50 גר', מהדק מרובע, מתקן למדידת מודול גזירה בעזרת מד זווית, משקולות, מיקרומטר.

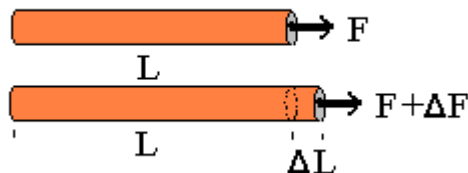
מטרות הניסוי:

להכיר את נושא האלסטיות.
למדוד מודול אלסטיות/יאנג של מתכות שונות.
לבחון יחסי כפיפה F/d עבור פסי מתכת במימדים שונים.
למדוד מודול גזירה של פלדה.

1. תיאוריה

1.1 מודול אלסטיות (יאנג)

כאשר גוף שרוי במאמץ (Stress) הוא משנה את ממדיו או צורתו. לשינוי היחסי בממדיו או בצורתו של גוף, קוראים בשם **מעוות או עיבור (Strain)**. מודול האלסטיות מוגדר כיחס בין השינוי במאמץ לשינוי המתאים במעוות או בניסוח פשוט יותר ההתנגדות של החומר לשינוי קטן בצורתו באמצעות כוח המופעל עליו, בתחום האלסטי, כלומר התחום בו היחס בין מאמץ למעוות שומר על ליניאריות נדון למשל במוט שאורכו L , בעל חתך רוחב אחיד ששטחו A , השרוי במאמץ מתיחה כמתואר באיור 1.



איור 1 : מוט תחת מאמץ מתיחה, תוספת כח משנה את אורך המוט.

-אלסטיות-

במקרה זה המאמץ מוגדר כיחס $\frac{F}{A}$ שבין הכוח F המותח את המוט לשטח החתך A . כתוצאה משינוי מאמץ המתיחה יהיה למוט מעוות מתיחה המתבטא בתוספת אורך ΔL . **מעוות המתיחה** מוגדר כיחס $\frac{\Delta L}{L}$ שבין תוספת האורך ΔL לאורך המוט L . כאשר מדובר במאמץ מתיחה, מודול האלסטיות נקרא בשם מודול יאנג (Young's modulus) אשר יסומן ב- Y .

$$(1) \quad Y = \frac{\Delta F/A}{\Delta L/L} = \frac{L}{A} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta L}$$

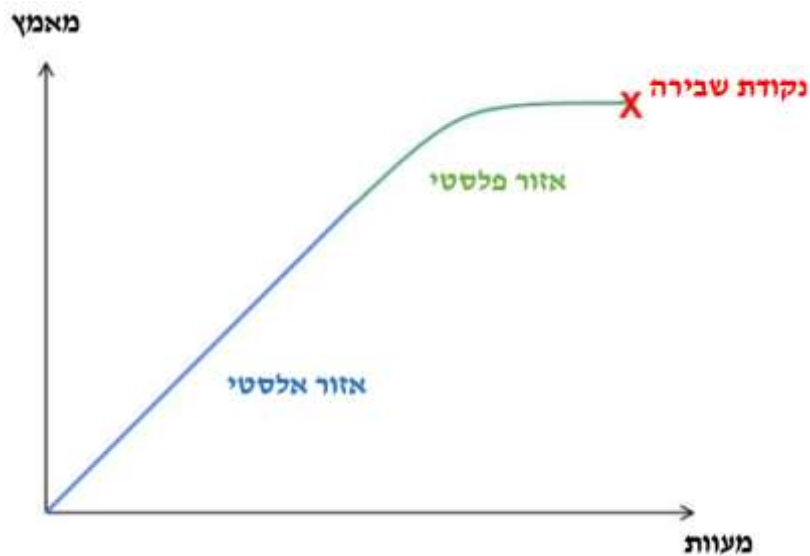
מסתבר כי ל- Y יש אותו הערך הן עבור מתיחה והן עבור דחיסה. תחום האלסטיות של המוט זהו התחום שבו מודול יאנג הוא קבוע ואינו תלוי במאמץ המופעל על המוט. בתחום האלסטיות התארכות המוט פרופורציונית לכוח, תופעה זו קרויה חוק הוק (Hook) והיא מזכירה את התנהגותו של קפיץ.

היחידות של Y הן יחידות של לחץ, במערכת MKS הן $N \cdot m^{-2}$ (ניוטון למטר מרובע). המשמעות הפיסיקלית של $Y = 1 N \cdot m^{-2}$ היא שע"י הפעלת כוח של ניוטון אחד על מוט שאורכו 1 מטר ושטחו 1 מ"ר המוט יתארך ב 1 מטר. כמובן שבאופן מעשי, ערכי מודול יאנג עבור מתכות הן בסדר גודל של $10^{11} N \cdot m^{-2}$. יחידה נוספת שימושית ללחץ היא פסקל $P = \frac{F}{A}$ המוגדר ככוח F ביחידות ניוטון (N) הפועל על שטח A ביחידות m^2 ולכן יחידות הפסקל $[Pa] = \frac{N}{m^2}$ תואמות לזה של מודול יאנג. בשל גודלן, מודל יאנג נמדד בגיגה פסקל כלומר: $1GPa = 10^9 Pa$.

הדיאגרמה המופיע באיור 2 מציגה את היחס בין המאמץ והמעוות ומכונה **עקומת מאמץ-מעוות**. האזור האלסטי (המגדיר את מודול האלסטיות) הוא התחום, בו התיאור של עקומת מאמץ-מעוות הוא ליניארי (הקו הישר שבדיאגרמה). בתחום אלסטי, החומר חוזר למצבו המקורי, כאשר הכוח מוסר. במידה ועוברים את הנקודה בה החומר מתנהג באלסטיות, העיוות שנוצר נותר קבוע והאזור מוגדר כאזור הפלסטי של החומר. אזור זה מאופיין ביחס לא ישר בין המאמץ למעוות. עליה קטנה במאמץ יכולה להוביל לעליה גדולה מאוד במעוות. האזור הפלסטי תחום בתחילתו בנקודת הכניעה של החומר (yield point) המהווה את הקצה

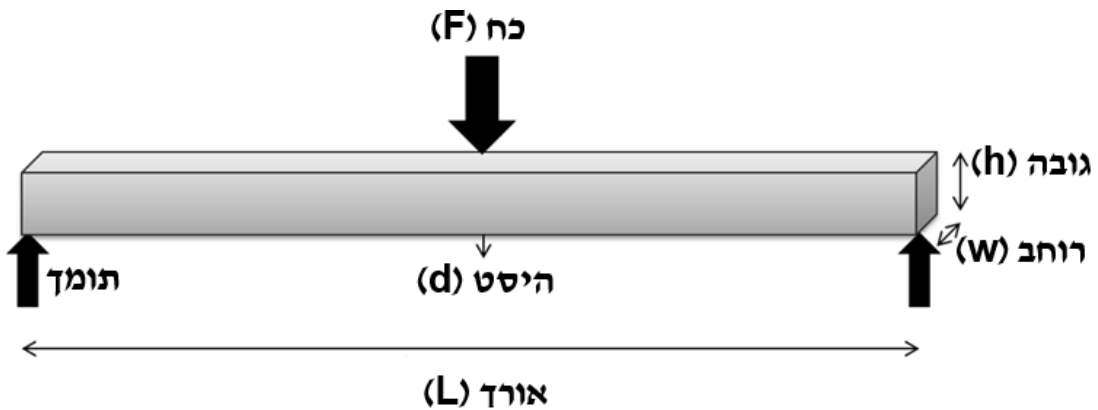
-אלסטיות-

העליון של האזור האלסטי או הנקודה בה הדגימה מתחילה לעבור נזק בלתי הפיך, ובסופו בנקודת הכשל, שבה המעוות המקסימאלי ולאחריו הדגימה נשברת.



איור 2 : עקומת מאמץ-מעוות.

בניסוי שנבצע במעבדה נמצא את מודול האלסטיות של מתכות ממדידת הדפורמציה/כפיפה של פסי מתכת דקים והתחשבות בממדיהם הגאומטריים. ניתן להשוות בין מודול האלסטיות (מודול יאנג) של פס מתכת הנתון למאמץ מתיחה לבין מודול הכפיפה המתקבל מכיפוף פס המתכת. באיור 3 ניתן לראות פס מתכת הנתמך בשני קצותיו ובמרכזו מופעל כח F .



איור 3 : פס מתכת הנתון למאמץ כפיפה

בשכבה העליונה ביותר של הפס (אם נתבונן בפרופיל האורכי) יהיה מאמץ הלחיצה הגבוה ביותר ואילו בשכבה התחתונה של הפס יהיה מאמץ המתיחה הגבוה ביותר.

ע"י מדידת ההיסט האנכי (d) הנגרם עקב הפעלת הכח F במרכז הפס ומדידת הממדים הפיזיים של הפס, ניתן לחשב את מודול יאנג של המתכת ממנה עשוי הפס.

$$(2) \quad Y_{bend} = Y_{elastic} = \frac{L^3 F}{4dwh^3}$$

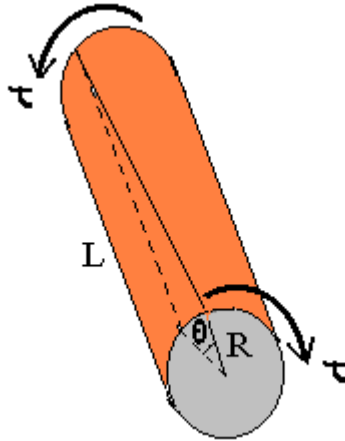
❖ הפרמטרים מופיעים באיור 3.

❖ סטודנטים המעוניינים לראות את הפיתוח המתמטי יכולים לעבור בקישור

[הבא.](#)

1.2 מודול גזירה

באופן דומה ניתן להגדיר גם מודול גזירה G (shear modulus). נתבונן בגליל אשר בקצהו פועל מומנט פיתול כמתואר באיור 4.



איור 4: מוט גלילי תחת מומנט פיתול.

מאמץ הגזירה הינו היחס בין הכוח $F=2\tau/R$ הפועל לפיתול הגליל לבין שטח החתך πR^2 . מעוות הגזירה הינו היחס $R\theta/L$. מודול הגזירה G מוגדר כיחס בין מאמץ הגזירה למעוות הגזירה

$$(3) \quad G = \frac{2L\tau}{\pi R^4 \theta}$$

גם היחידות של G הן יחידות של לחץ, וגם כאן ערכים מעשיים הם מסדר גודל של 10^{10} Nm^{-2} .

הסרטון שמסביר את המושגים הבסיסיים:

<https://www.youtube.com/watch?v=CDK2SwS92Kk>

1.3. שאלות הכנה

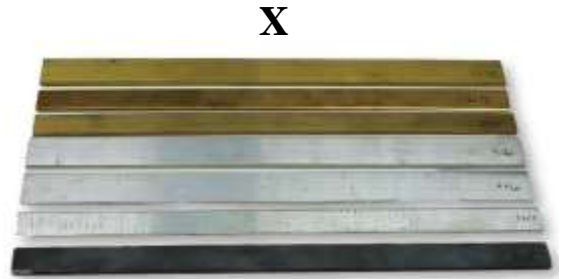
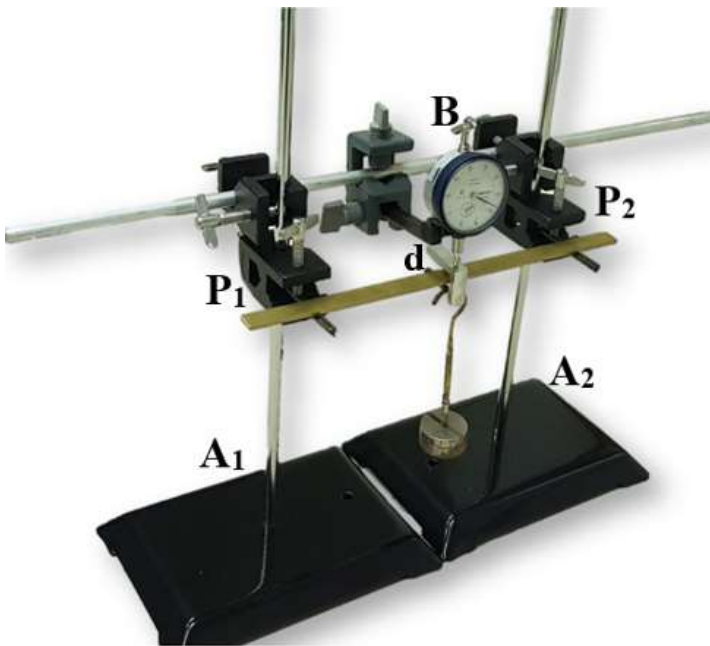
1. בניסוי למדידת מודול יאנג מחברים שני תיילים מחומרים שונים במקום תיל אחיד (עם פרמטרים $(A_2, A_1, L_2, L_1, Y_2, Y_1)$). חשב את ההתארכות הכוללת של התיל כאשר מופעל עליו כוח F . מהם התנאים לכך שתיל אחד יהיה דומיננטי בניסוי. הסבר מדוע ניתן להתעלם בניסוי מהאלסטיות של המלחציים.
2. בתחום האלסטיות כאמור מודל יאנג (נוסחה 1) מקבל ערך קבוע. התנהגות זו דומה להתנהגות קפיץ (להזכירכם בקפיץ $\Delta F = k\Delta x$). איך ניתן להראות את הדמיון לקפיץ על פי משוואה 1? מה יהיה המקביל של הערך k ? נתון שערך זה שווה ל- $6 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-1}$, $Y = 1.9 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$, ורדיוס התיל $r = 0.3 \text{ mm}$. למה שווה אורך התיל L ?
3. מודול גזירה של נחושת הוא 42 GPa , חשב את המומנט הדרוש על מנת לפתל מוט באורך 1 מטר , בקוטר 3 מ"מ , בזווית של 60 מעלות.
4. במדידת ממדי פס אלומיניום דק התקבלו תוצאות הבאות: עובי הפס 3 מ"מ , רוחב הפס 15 מ"מ ואורך הפס 22 ס"מ . דיוק מכשיר המדידה הוא 0.01 מ"מ . סטודנט תלה מסה של 100 גרם באמצע הפס, אשר גרמה להיסט האנכי של 0.08 מ"מ במרכז הפס. חשב את מודול יאנג של האלומיניום והערך את השגיאה. (התייחס רק לשגיאות הנתונות).
5. מצא בספרות את מודול יאנג של פלזי וחשב את ההיסט האנכי של אמצע פס דק, כאשר מעמיסים עליו מסה של 400 גרם . ממדי הפס הם $L = 0.2 \text{ m}$, $h = 2 \text{ mm}$, $w = 25 \text{ mm}$.

2. מהלך הניסוי

2.1 המערכת הניסיונית למדידת מודול יאנג

- באיור 5 מופיעה המערכת למדידת ההיסט (דפורמציה) האנכי של פס מתכת. הפס מתעקם עקב הפעלת הכח בניצב לאמצע הפס והמטרה היא למדוד את מידת הכיפוף של הפס באמצע. בין שני המעמדים האופקיים A_1 ו- A_2 מניחים פס דק ממתכת. הפס מונח על שני מוטות גליליים דקים (ללא הידוק) כפי שמתואר באיור 5. במרכז הפס תולים מתאם d , שמתאם בין המשקולות התלויות לבין מד הדפורמציה B .

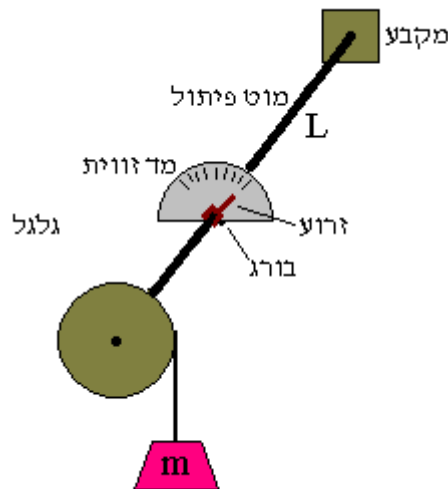
-אלסטיות-



איור 5 : מערך הניסוי למדידת מודול האלסטיות. A_1, A_2 - מעמדים, P_1, P_2 - תומכי פס המתכת, d - מתאם בין המשקולות למד דפורמציה, B - מד דפורמציה (מיקרומטר), X - פסי מתכת

2.2 המערכת הניסיונית מדידת מודול גזירה

מערכת המדידה מורכבת ממוט פלדה המוחזק בקצהו האחד, בקצהו השני מחובר גלגל, תליית משקולת על הגלגל תפעיל מומנט פיתול על המוט. מדידת זווית הפיתול נעשית ע"י מד זווית ברדיאנים. המערכת מתוארת באיור 6.



איור 6 : מערכת למדידת מודול גזירה

על גבי המוט מחברים זרוע באמצעות בורג במרחק L מהמקבע. כאשר המוט מתפתל, הזרוע מסתובבת ומצביעה על מד הזווית. מד הזווית עשוי מחצי מעגל ברדיוס 10 ס"מ, תזוזה של ס"מ על היקף המעגל שקולה אם כן לזווית של 0.1 רדיאן. את

המשקולות נתלה על גלגל בקוטר d , ולכן המומנט שמופעל על קצה המוט יהיה $\tau = mgd/2$. אם נציב את הביטוי עבור המומנט במשוואה (3) נקבל את הקשר

$$(4) \quad \theta = \frac{dg}{\pi GR^4} mL$$

זווית הפיתול תלויה במרחק L ובמסה m . במהלך הניסוי נמדוד את זווית הפיתול במרחק קבוע עבור מסות שונות, ובמסה קבועה עבור מרחקים שונים.

3. הנחיות ביצוע

3.1 מדידת מודול יאנג

1. תמדדו את אורך הפס עשויי פלדה עם סרגל (אורך הפס L נמדד בין שני התומכים P_1, P_2). בנוסף תמדדו את רוחב הפס w ועובי הפס h (איור 3) באמצעות קליבר.
כל מימד יש לבדוק לפחות 3 פעמים במיקומים שונים לאורך הפס ולמצע. היעזר בטבלה הבאה ומלא בה את תוצאות המדידה:

הדגם הנבדק	w_i [m]	w_{avg} [m]	h_i [m]	h_{avg} [m]	L_i [m]	L_{avg} [m]

2. המתאם d שעליו תולים משקולות מחובר **לאמצע** הפס והמיקרומטר שמחובר למתאם אמור להראות ערך התחלתי (כלשהו) לצורכי האיפוס, למשל $2 \text{ mm} \sim d_0$. כלומר, הערך ההתחלתי של המיקרומטר הינו $d_0 = 2 \text{ mm}$. במצב זה **אפסו את המיקרומטר** ע"י הסיבוב של הטבעת החיצונית שלו.
3. תבחרו משקולת כלשהי (m_1) ותשקלו אותה יחד עם המחזיק (במידה ומחזיק המשקולות שוקל מעל 50 gr , ניתן להשתמש במחזיק עצמו כמשקולת).
4. תתלו בזהירות את מחזיק המשקולות יחד עם המשקולת m_1 על המתאם ורישמו את הקריאה של המיקרומטר d . (שימו לב: יחידות השנתה של המיקרומטר הן $[0.01 \cdot \text{mm}]$).

-אלסטיות-

5. הורידו את מחזיק המשקולות, תתלו משקולת נוספת עליו ותשקלו שוב את המחזיק עם המשקולות. **אפסו** את המיקרומטר ותתלו שוב את המחזיק עם המשקולות על המתאם. חזרו על סעיף 4.

6. חזרו על סעיף 4, עבור 3 משקולות m_i נוספות. (סה"כ 5 מדידות)

7. חישבו את כח הדפורמציה לפי הקשר $F = mg$ (כאשר $g = 9.8 \frac{m}{sec^2}$) עבור כל מסה (מסה = מחזיק + משקולת).

8. יש לחזור על כל המדידות והחישובים עבור דגמים נוספים (2 פסי אלומיניום ו-2 פסי פליז שונים)

9. ניתן להיעזר בטבלה הבאה לסידור התוצאות או בקובץ עזר שנמצא [כאן](#) :

הדגם הנבדק	m[kg]	F[N]	d[m]	$F/d [N/m]$	Y[Pa]

$$1 Pa \left(N / m^2 \right) = 1 \cdot 10^{-6} N / mm^2 = 1.4504 \cdot 10^{-4} psi$$

$$1 GPa = 10^9 N / m^2 = 10^6 N / cm^2 = 10^3 N / mm^2$$

10. חישבו את היחס הממוצע F/d עבור כל חומר (היחס בין הכח המופעל למידת הכיפוף). השוו בין פסי מתכת השונים. מהי מסקנתכם?

11. שרטטו גרף של הכח F המופעל על הפס כפונקציה של מידת הכיפוף d , עבור כל פס שנבחן.

12. חלצו מתוך שיפוע הגרף של הכח F כפונקציה של מידת הכיפוף d את מודול יאנג.

13. השוו מודול יאנג שהתקבל עבור כל חומר שנבדק לערכים התאורטיים של

החומרים השונים המופיעים ב-engineeringtoolbox

https://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_417.html

14. בצעו דיון בתוצאות.

3.2 מדידת מודול גזירה

בהתייחס למערכת המתוארת באיור 6. תמדדו את קוטר הגלגל. שים לב שהמשקולת תלויה על חוט העובר במסילה על היקף הגלגל, תחשבו מהו הרדיוס שעליו מופעל הכוח. תעריכו את השגיאה במדידה. תמדדו את קוטר המוט במספר מקומות וחישבו את הקוטר הממוצע, תעריכו את השגיאה.

3.2.1 מדידות במרחק קבוע

תקבעו את הזרוע (ראו איור 6) במרחק L מהקצה המקובע, תמדדו את L ותעריכו את השגיאה במדידה. העמיסו בהדרגה משקולות של 200 גרם (עד 1000 גרם) על היקף הגלגל ורישמו את זווית הפיתול, חזרו על מדידת הזווית גם במהלך הורדת המשקולות. שרטטו בגרף את זווית הפיתול כפונקציה של המסה, מתוך שיפוע הגרף **חישבו את מודול הגזירה**. העריכו את השגיאה.

3.2.2 מדידות במסה קבועה

תתלו מסה של 800 גרם על הגלגל. תמדדו את זווית הפיתול עבור עומס קבוע במרחקים שונים (עבור L שונים). שימו לב שעליכם לאפס מחדש את מד הזווית לאחר שינוי מיקום הזרוע. שרטטו בגרף את זווית הפיתול כפונקציה של המרחק, מתוך שיפוע הגרף **חישבו את מודול הגזירה**. העריכו את השגיאה.

4. סיכום

תשוו בין ערכי G שמצאתם בשני השלבים, תשוו גם עם הערך המופיע בספרות: מודול גזירה של פלדה $G=8.4 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$. הסבירו את ההבדלים. בצעו דיון בתוצאות והסיקו מסקנות.