מומנט התמדה

מילות מפתח:

גוף קשיח, מומנט התמד (Inertia), מומנט כוח (Torque), מטוטלת פיסיקלית, מטוטלת פיתול.

הציוד הדרוש:, דיסקת אלומיניום תלויה על תייל, 2 גלילים פליז תלויים על תייל, 2- גלילי פליז עם הברגה, משקלות מלבניות מברזל, מאזניים, קליבר, שעון עצר.

מטרות הניסוי:

- להכיר את מושג ההתמדה ושיטות למדידת מומנט התמדה.
- למדוד מומנט התמד בעזרת זמן מחזור של תנועה הרמונית סיבובית.
- לחשב מומנט התמד תוך שימוש בתכונת האדיטיביות ומשפט שטיינר.

1. תיאוריה

1.1 מומנט התמד

החוק השני של ניוטון $F=ma$ קובע כי יש צורך בכוח על מנת לשנות את מהירותו של גוף. מסת הגוף היא למעשה ההתמד של הגוף, כלומר ככל שמסת הגוף גדולה יותר הגוף יתמיד בתנועתו ודרוש כוח גדול יותר כדי לשנות את מהירותו. באופן דומה, כאשר גוף קשיח מסתובב סביב ציר מסוים יש לגוף נטייה להמשיך בתנועתו הסיבובית, מומנט ההתמד של הגוף הוא האנלוגיה של המסה כלומר ככל שמומנט ההתמד גדול יותר יש צורך במומנט כוח גדול יותר על מנת לשנות את מהירות הסיבוב של הגוף. החוק השני של ניוטון עבור תנועה סיבובית של גוף קשיח בעל מומנט התמד I אשר מופעל עליו מומנט כוח τ הוא $\tau = I\alpha$, כאשר α היא התאוצה הזוויתית.

את מומנט ההתמד מחשבים באופן הבא: כאשר נתון אוסף של מסות נקודתיות (m_i) הנמצאים במרחקים שונים מציר הסיבוב (r_i) מומנט ההתמד מוגדר ע"י:

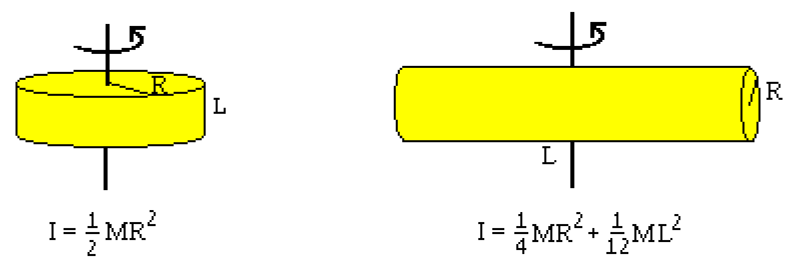
$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (1)$$

כאשר הגוף הנתון איננו נקודתי ניתן לחלק את הגוף לאלמנטי מסה קטנים m_i, שמרחקו של כל אלמנט מסה מציר הסיבוב הוא r_i ומומנט ההתמד יהיה:

$$I = \int r^2 dm \tag{2}$$

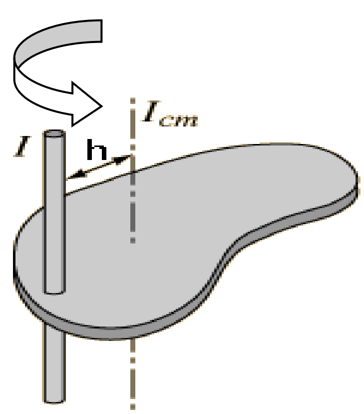
מומנט ההתמד יהיה תלוי בנוסף למסה גם במיקומו ובכוונו של ציר הסיבוב.

לדוגמא: גליל בעל מסה M רדיוס R ואורך L המסתובב סביב ציר העובר דרך מרכז המסה וניצב לבסיסים, מומנט ההתמד הוא: $I = \frac{1}{2}MR^2$, ואילו אם הציר עובר דרך מרכז המסה ומקביל לבסיסים מומנט ההתמד הוא: $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$.



איור 1: מומנט התמד של גליל עבור צירים שונים.

לרוב, נוח לחשב את מומנט ההתמד של גוף עבור ציר סיבוב העובר דרך מרכז המסה. כאשר ציר הסיבוב אינו עובר דרך מרכז המסה אלא בציר אחר <u>המקביל</u> לציר העובר דרך מרכז המסה, נוכל להיעזר במשפט שטיינר לחישוב מומנט ההתמד:



איור 2: מוט המסתובב סביב ציר הסיבוב שלא עובר דרך מרכז מסתו.

$$I = I_{c.m.} + Mh^2 \qquad (3)$$

כאשר h הוא המרחק ההסטה בין הציר העובר דרך מרכז המסה לציר האחר ו M מסת הגוף. מומנט התמד הוא גודל אדיטיבי, כלומר, מומנט ההתמד של גוף קשיח הבנוי משני חלקים הוא סכום מומנטי ההתמד של כל אחד מהחלקים (כאשר כל המומנטים מחושבים יחסית לאותו ציר).

<u>הדגמה</u> : https://www.edumedia-sciences.com/en/media/706-moment-of-inertia

1.2 מטוטלת פיסיקלית

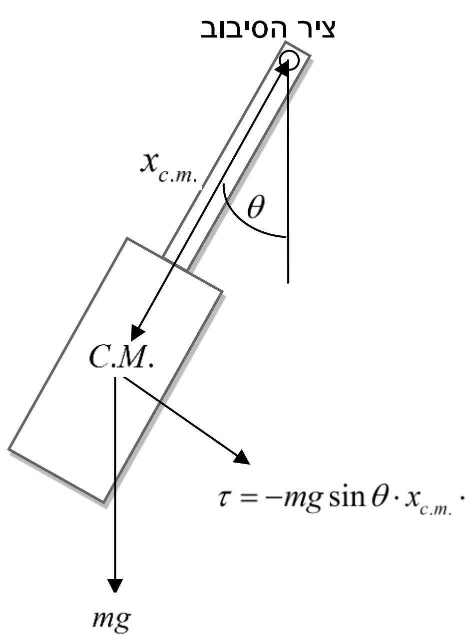
במערכות בהן הכוח הפועל על גוף הוא כוח מחזיר הפרופורציוני ישר להעתק מתקבלת תנועה הרמונית (ראה מבוא לתדריך תנודות הרמוניות). לדוגמא מסה המחוברת לקפיץ, הכוח שהקפיץ מפעיל פרופורציוני להעתק ומנוגד לו בכוונו (כוח מחזיר) $F=-kx$ משוואת התנועה עבור תנועה הרמונית נכתבת בצורה :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (4)$$

כאשר : $\omega^2 = \frac{k}{m}$ וזמן המחזור של התנודות הוא : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (ראה עבודת הכנה).

בתנועה מחזורית של מטוטלת פיסיקלית (גוף עם מומנט התמד I המתנודד סביב ציר במרחק $x_{c.m.}$ מנקודת מרכז המסה של הגוף), המקביל להעתק הפעם הוא זווית הסיבוב θ, ולמסה - מומנט ההתמד (I) ואילו לכוח המחזיר המקביל הוא מומנט הכוח τ.

המומנט המחזיר הוא הפרופורציוני לזווית $\tau = -mg\sin\theta \cdot x_{c.m.}$, משוואת התנועה עבור זוויות מספיק קטנות (שבהן $\sin\theta \approx \theta$) תהיה :



איור 3: מטוטלת פיסיקאלית

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \cdot x_{c.m.} \cdot \theta$$

(5)

וזמן המחזור של התנודות יהיה:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg \cdot x_{c.m.}}} \qquad (6)$$

בניסוי נשתמש בתנועה הרמונית כדי למדוד את מומנט ההתמד של גופים שונים (עקב העובדה שמומנט ההתמד פרופורציוני לריבוע זמן המחזור). כמו כן, נחשב את מומנט התמד של גופים מורכבים תוך שימוש בתכונת האדיטיביות ובמשפט שטיינר.

1.3 מטוטלת דו חוטית

נתלה גליל באורך d באמצעות שני חוטים מקבילים באורך L , כאשר הגליל מתנודד בתנודות סיבוביות קטנות סביב ציר העובר דרך מרכזו ומקביל לבסיסיו מתקבלת תנועה הרמונית. נתבונן באיור 4 ונחשב את מומנט הכוח המחזיר: המתיחות בכל אחד

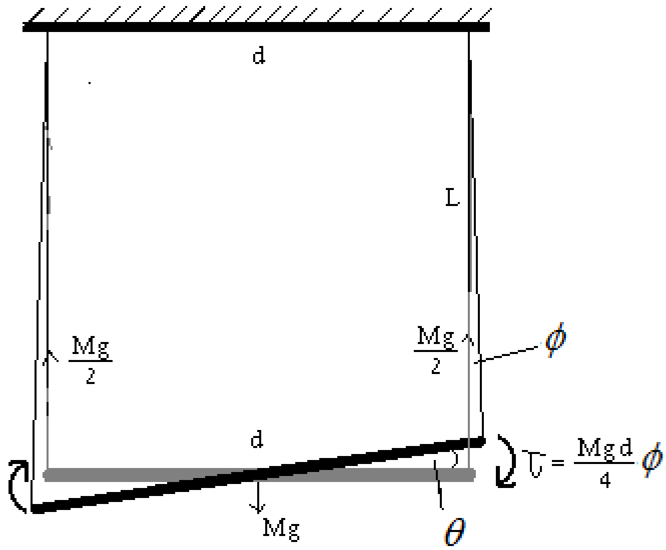
מהחוטים היא: $\frac{Mg}{2}$, אם הגליל מוסט בזווית קטנה θ נוצרת זווית ϕ בין החוט לאנך כך ש $L\varphi = \frac{d}{2}\theta$. הכוח המחזיר המופעל ע"י החוט על קצה הגליל הוא $\frac{Mg}{2}\sin\varphi$.

בקירוב של זוויות קטנות, המומנט השקול הפועל על הגליל הוא: $\tau = \frac{Mgd^2}{4L}\theta$.

ובהתאם למשוואה (6) זמן המחזור של התנודות יהיה:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4IL}{Mgd^2}} \qquad (7)$$

ממדידת זמן המחזור נוכל לחשב את מומנט ההתמד.



איור 4 : מטוטלת דו חוטית

1.4 מטוטלת פיתול

כאשר מחזיקים תיל בקצה אחד ומסובבים (מפתלים) את הקצה השני בזווית θ, נוצר בתיל מומנט מחזיר השואף להחזיר את התיל למצבו הקודם (עיין בתדריך לניסוי אלסטיות) ערכו יהיה : $\tau = \frac{\pi G a^4}{2L}\theta$.

כאשר a רדיוס התיל, L אורך התיל ואילו G מומנט הגזירה.

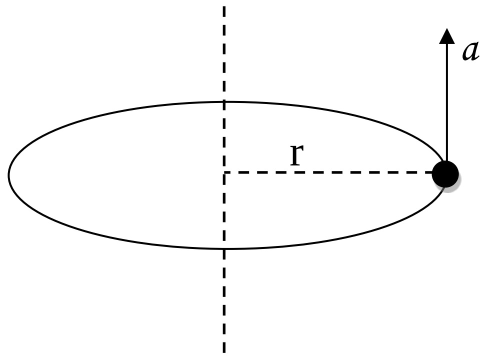
אם נתלה גוף בעל מומנט התמד I נקבל תנועה הרמונית סיבובית עם זמן מחזור T כאשר מומנט ההתמד פרופורציוני לריבוע זמן המחזור

$$T^2 = \frac{8\pi L I}{a^4 G} \qquad (8)$$

באמצעות שיטה זו (מומנט פיתול) ניתן להשוות בין מומנט ההתמד של גופים שונים מתוך השוואת זמני המחזור.

1.5 מטוטלת פיתול עם מסות נקודתיות

נתבונן במסה נקודתית המסתובבת סביב ציר מסוים כפי שמתואר באיור 5



איור 5 : גוף נקודתי מסתובב

האנרגיה הקינטית של הגוף הנקודתי היא :

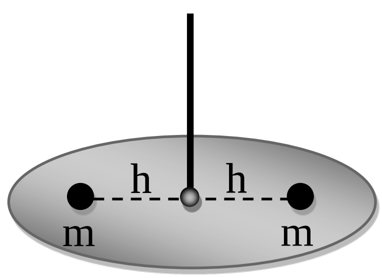
$$E_k = \frac{mV^2}{2};\ V = \omega r$$
$$E_k = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{\left(mr^2\right)\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

כלומר מומנט התמד של גוף נקודתי שמסתו m המסתובב סביב ציר מסוים הוא :

$$I = mr^2 \qquad (9)$$

ואם יש מערכת של n גופים נקודתיים : $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

כעת נתבונן בדסקה התלויה על תיל דק ועליה מונחות בצורה סימטרית שתי מסות נקודתיות במרחק h מהמרכז.



(בניסוי שיבוצע במעבדה אנו משנים את המרחק h בקפיצות שוות ומודדים את זמן המחזור של הדסקה המסתובבת סביב מרכז מסתה).

במצב כזה לפי משוואה (8) ניתן לראות שהביטוי $\frac{8\pi L}{a^4 G}$ הוא קבוע. נסמן את הביטוי $\frac{8\pi L}{a^4 G}$ באות α.

מכאן נוכל לרשום את משוואה (8) בצורה הבאה: $T^2 = \alpha I$

ה- I כאן הוא מומנט ההתמד הכולל של הדסקה ושל הגופים הנקודתיים המונחים עליה.
מומנט ההתמד הכולל יחושב לפי:

$$I = I_{C.M_{disk}} + 2mh^2$$

ריבוע זמן המחזור של הדסקה עם שני גופים נקודתיים יחושב לפי:

$$T^2 = \alpha \cdot \left(I_{C.M_{disk}} + 2mh^2 \right)$$

או

$$T^2 = \alpha I_{C.M_{disk}} + 2\alpha mh^2 \qquad (10)$$

1.6 עבודת הכנה

1. הראה ש: $x(t) = A\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ הוא פתרון של המשוואה: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, הראה שזמן המחזור הוא: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
2. נתונה דסקית גלילית ברדיוס R ומסה M המסתובבת סביב ציר הסימטריה שלה. על הדסקית מונחים שני גלילים קטנים ברדיוס r ומסה m כל אחד. המרחק בין מרכז כל גליל למרכז הדסקית הוא h. חשב את מומנט ההתמד הכולל.
3. נתונה דסקית גלילית ברדיוס R, עובי H וצפיפות מסה ρ המסתובבת סביב ציר הסימטריה שלה. בדסקית ישנם שני קדחים עגולים ברדיוס r. המרחק בין מרכז כל קדח למרכז הדסקית הוא h. חשב את מומנט ההתמד.
4. בהתאם למשוואה (2), ניתן לחשב את מומנט ההתמד ע"י חישוב האינטגרל $I = \int r^2 dm$. חשב את מומנט ההתמד של מוט דק באורך L ומסה M המסתובב סביב ציר העובר בקצה המוט וניצב למוט. רמז: אלמנט מסה אינפיניטסימלי יהיה: $dm = \frac{M}{L}dx$ ומרחקו מציר הסיבוב הוא x.

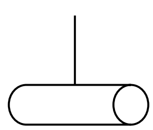
5. נתונים שני גלילים בעלי רדיוס ומסה זהה אחד הגלילים מלא והשני חלול דק דופן (מומנט התמד שונה) שנהם מתגלגלים מאותה נקודה התחלתית וממצב מנוחה לאורך מישור משופע. בהגיעם לתחתית המישור מהירותו של מי מהם תהיה גבוהה יותר? נמק!

2. מהלך הניסוי

2.1 מדידת מומנט התמד של גליל פליז באמצעות מטוטלת דו-חוטית

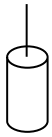
- נתון לכם גליל פליז עבורו נמדוד את מומנט ההתמד. שיקלו את הגליל, תמדדו את אורכו, רדיוסו ואת אורך החוט L עליו הוא תלוי.
- תתלו את גליל הפליז כמתואר באיור 4. וודאו שהחוטים מקבילים והגליל אופקי.
- הסיטו את הגליל להתנודד בתנודות סיבוביות סביב ציר העובר במרכזו וניצב לציר הסימטריה, הקפידו על תנודות קטנות.
- תמצאו את זמן המחזור מתוך מדידת תקופת זמן של 20 מחזורים.
- תמצאו את מומנט ההתמד בעזרת משוואה (7), השוו עם הגודל המחושב מתוך ממדי הגליל כמתואר באיור 1. יחידות של מומנט התמד הן $[kg \cdot m^2]$ במערכת MKS.
- הסבירו כיצד משפיעים הברגים הנמצאים בקצות הגליל על המדידה. חשבו כיצד תושפע התוצאה אם התנודות לא תהיינה קטנות (האם תקבלו תוצאה גדולה או קטנה מהמצופה).

2.2 מדידת מומנט ההתמד של גליל פליז באמצעות מטוטלת פיתול



א. גליל המסתובב סביב ציר העובר במרכזו ומקביל לבסיסים

- תתלו את גליל הפליז על תיל פלדה כך שיסתובב סביב ציר מרכז המסה שלו, באופן דומה לניסוי הקודם אך הפעם על תיל פלדה.
- תמצאו את זמן המחזור (T_1) מתוך מדידת תקופת זמן של 10 מחזורים.
- תמדדו את קוטר התיל ואת אורכו.
- חישבו בעזרת משוואה (8) את מומנט ההתמד של הגליל. השתמשו ב- $G_{steel} = 8.4 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$ והשוו למומנט התמד שקיבלתם באמצעות מטוטלת דו חוטית.



ב. גליל המסתובב סביב ציר העובר במרכזו וניצב לבסיסים

- תתלו כעת את גליל הפליז כך שיסתובב סביב ציר הסימטריה שלו (ראו איור מעלה) ותמדדו את זמן המחזור במצב זה (T_2) מתוך מדידת תקופת זמן של 10 מחזורים.
- חישבו את מומנט ההתמד במצב ב' (I_2) עבור ציר זה, מתוך השוואת בין זמני המחזור שנמדדו בסעיף א' ו-ב' ושימוש במשוואה (8) – השתמשו בערך I_1 המחושב מתוך ממדי הגליל שבסעיף א'.

כלומר:

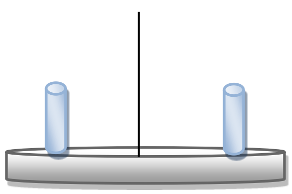
$$T_1^2 = \alpha I_1 \quad ; \quad T_2^2 = \alpha I_2$$

השוואת זמני מחזור בין סעיף א' ו-ב':

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{I_1}{I_2} \;\Rightarrow\; I_2 = I_1 \Big/ \left(T_1 / T_2\right)^2$$

השוו את התוצאה (I_2) עם הערך המחושב מתוך ממדי הגליל.

- תמצאו את α ואת מודול הגזירה של תיל פלדה, השוו עם הערך הידוע מהספרות ($G_{steel} = 8.4 \cdot 10^{10}\ \frac{N}{m^2}$).



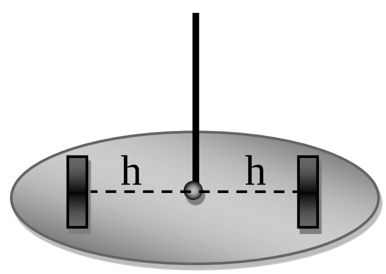
ג. דסקית אלומיניום עם משקולות קטנות (**גלילים ארוכים**)

- נתונה לכם דסקית אלומיניום שמסתה מופיעה על המדבקה, תמדדו את רדיוס הדסקית ואת עובייה.
- תתלו את דסקית האלומיניום על התיל. הקפידו שהדסקית תהיה אופקית. תמדדו את זמן המחזור מתוך מדידת תקופת זמן של 4 מחזורים.
- הבריגו לדסקית משקולות שוות מסה m במרחק h מהמרכז בצורה סימטרית, תמדדו את זמן המחזור. חזרו על המדידה עבור מרחקים שונים.
- בהנחה שהמשקולות נקודתיים מומנט ההתמד הכולל של הדסקית והמשקולות נתון ע"י : $I = I_{c.m.} + 2mh^2$. שרטטו בגרף את ריבוע זמן המחזור כפונקציה של h^2
- בצעו התאמה לינארית לנקודות בגרף שקיבלתם וקבלו משוואת הישר.

- משוואת הישר שקיבלת מתארת את משוואה 10 ($T^2 = b + ah^2$) כאשר הקבועים הם $b = \alpha I_{c.m}$ ו- $a = 2\alpha m$
- תמצאו את $I_{c.m}$ של הדסקית ואת α (היעזרו במשוואה שקיבלתם מתוך הגרף).
- השוו את מומנט ההתמד שקיבלתם עבור הדסקית עם זה המחושב מתוך מימדי הדסקית.
- חשבו כיצד ישפיעו הקדחים על מומנט ההתמד, וכיצד תשפיע העובדה שהמשקולות אינן נקודתיות.

ד. דסקית אלומיניום בתוספת גופים לא נקודתיים

- נתונים שני גופים זהים בצורת תיבה, תמדדו את ממדי התיבה ואת מסתה.
- הניחו את הגופים על דסקית האלומיניום במרחק h ממרכזה (בחר לך h), סובבו את המערכת בזווית קטנה מספיק ותמדדו את זמן המחזור.



- מתוך משוואה (8) עבור מטוטלת פיתול ידוע ש :

$$T^2 = \frac{8\pi L}{a^4 G} I = \alpha I$$

נסמן את מומנט ההתמד של הדסקית ללא שום גוף עליה כפי, שמצאתם בסעיף הקודם, ב- I_0 , ואת מומנט ההתמד של הדסקית יחד עם המשקולות ב- I_{tot} .

מומנט ההתמד הכללי שווה ל-

$$I_{tot} = I_0 + 2I^* \qquad (11)$$

כאשר:

I_{tot} - מומנט התמד של הדסקה עם התיבות

I_0 - מומנט התמד של הדסקה בלבד (חושב בסעיף הקודם)

I^* - מומנט התמד של התיבה יחסית לציר הסיבוב העובר במרכז הדסקית

מכיוון שהתיבות מסתובבות סביב הציר העובר לא דרך מרכז מסתם, I^* יחושב בעזרת משפט שטיינר:

$$I^* = I_{C.M_{BOX}} + m_{box}h^2 \qquad (12)$$

- חישבו את I_{tot} לפי הפיתוח הבא:

$$\left(\frac{T_0}{T_{tot}}\right)^2 = \frac{\alpha I_0}{\alpha I_{tot}} = \frac{I_0}{I_{tot}}$$

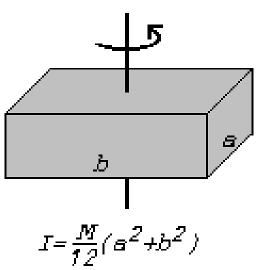
$$I_{tot} = \frac{I_0}{\left({T_0}/{T_{tot}}\right)^2}$$

כאשר:

T_{tot} - הוא זמן המחזור של הדסקית עם התיבות עליה.

T_0 - זמן המחזור של הדסקית בלבד.

- תמצאו את I^* מתוך I_{tot} בהתאם לנוסחה (11)
- חישבו את מומנט ההתמד של התיבה סביב מרכז מסתה $I_{C.M_{BOX}}$ בהתאם לנוסחה (12).



- השוו עם הערך המחושב מתוך ממדי התיבות $I_{C.M_{BOX}} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$.
- חזרו על המדידה של זמן המחזור כאשר הגופים מונחים בזוויות שונות ביחס לדסקית, מהי מסקנתכם?