

תנע זוויתי

מילות מפתח:

תנע זוויתי, מומנט התמד (Inertia), מומנט כוח (Torque), מהירות זוויתית, תאוצה זוויתית.

הציוד הדרוש: מחשב, ממשק, מערכת למדידת תנע זוויתי, גלגלת ממחושבת, 2 דיסקים, מחזיק משקולות מפלסטיק, משקולות, פלטה מלבנית מתכתית (שחורה).

מטרות הניסוי:

- להכיר מושגים הקשורים לתנועה סיבובית ותאוצה זוויתית.
- לבחון את שימור התנע הזוויתי בהתנגשות פלסטית.
- גלגולי אנרגיה גרביטציונית בקינטית סיבובית וקינטית העתקה.

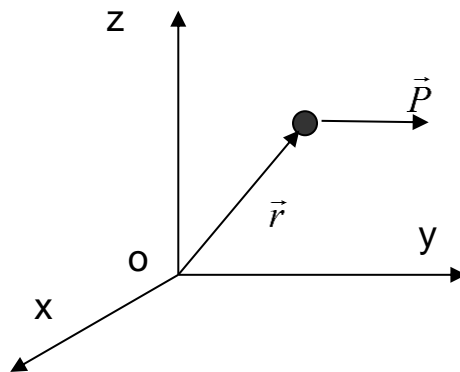
1. תיאוריה

1.1 תנע זוויתי

התנע הזוויתי של חלקיק בעל תנע קווי \vec{P} יחסית לנקודה O מוגדר כ-

$$(1) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

כאשר \vec{r} הוא הווקטור המכוון מנקודה O אל מקום החלקיק (איור 1). התנע הזוויתי של מערכת של חלקיקים הוא סכום וקטורי של התנעים הזוויתיים של כל החלקיקים.



איור 1: התנע הסיבובי של חלקיק נקודתי

כאשר גוף קשיח מסתובב סביב ציר קבוע במהירות זוויתית $\vec{\omega}$, וקטור התנע הזוויתי הינו בכיוון ציר הסיבוב

$$(2) \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

כאשר I הוא מומנט ההתמד של הגוף יחסית לציר הסיבוב.

בדומה לחוק השני של ניוטון הקובע כי שינוי התנע הקווי של חלקיק ייתכן רק אם פועל כוח עליו, כך גם שינוי התנע הזוויתי בזמן של גוף ייתכן רק אם פועל עליו מומנט כוח חיצוני והקשר נתון ע"י

$$(3) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

כאשר $\vec{\tau}$ הוא סכום מומנטי הכוח החיצוניים הפועלים על הגוף. במערכת אשר לא פועלים עליה מומנטי כוח חיצוניים התנע הזוויתי הכולל נשמר. תנע זוויתי הוא וקטור ופירושו של דבר שהתנע הזוויתי שומר הן על גודלו והן על כווננו. לדוגמא: מצפן גירוסקופ מכיל בתוכו סביבון אשר מסתובב במהירות גבוהה ושומר על כווננו וכך משמש כמצפן.

1.2 מומנט התמדה

החוק השני של ניוטון $F=ma$ קובע כי יש צורך בכוח על מנת לשנות את מהירותו של גוף. מסת הגוף היא למעשה ההתמד של הגוף, כלומר ככל שמסת הגוף גדולה יותר הגוף יתמיד בתנועתו ודרוש כוח גדול יותר כדי לשנות את מהירותו. באופן דומה, כאשר גוף קשיח מסתובב סביב ציר מסוים יש לגוף נטייה להמשיך בתנועתו הסיבובית, מומנט ההתמד של הגוף הוא האנלוגיה של המסה כלומר ככל שמומנט ההתמד גדול יותר יש צורך במומנט כוח גדול יותר על מנת לשנות את מהירות הסיבוב של הגוף. החוק השני של ניוטון עבור תנועה סיבובית של גוף קשיח בעל מומנט התמד I אשר מופעל עליו מומנט כוח τ הוא $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, כאשר α היא התאוצה הזוויתית. את מומנט ההתמד מחשבים באופן הבא: כאשר נתון אוסף של מסות נקודתיות (m_i) הנמצאים במרחקים שונים מציר הסיבוב (r_i) מומנט ההתמד מוגדר ע"י:

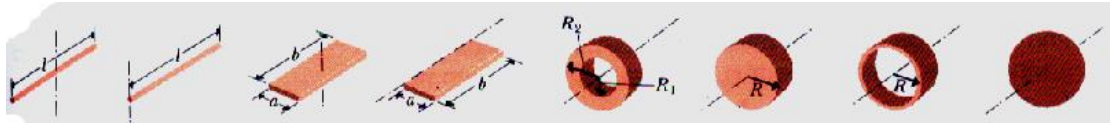
$$(4) \quad I = \sum_i m_i r_i^2$$

כאשר הגוף הנתון איננו נקודתי ניתן לחלק את הגוף לאלמנטי מסה קטנים m_i , שמרחקו של כל אלמנט מסה מציר הסיבוב הוא r_i ומומנט ההתמד יהיה:

$$(5) \quad I = \int r^2 dm$$

מומנט ההתמד תלוי בנוסף למסה גם במיקומו ובכוונו של ציר הסיבוב. איור 2 מכיל מספר דוגמאות של מומנטי התמדה:

-תנע זוויתי-



$$\frac{1}{12}ML^2 \quad \frac{1}{3}ML^2 \quad \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \quad \frac{1}{3}Ma^2 \quad \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \quad \frac{1}{2}MR^2 \quad MR^2 \quad \frac{2}{5}MR^2$$

איור 2: מומנטי התמד של מספר גופים, ציר הסיבוב משורטט בקו מקוקו.

לרוב, נוח לחשב את מומנט ההתמד של גוף עבור ציר סיבוב העובר דרך מרכז המסה. כאשר ציר הסיבוב אינו עובר דרך מרכז המסה אלא בציר אחר המקביל לציר העובר דרך מרכז המסה, נוכל להיעזר במשפט שטיינר לחישוב מומנט ההתמד:

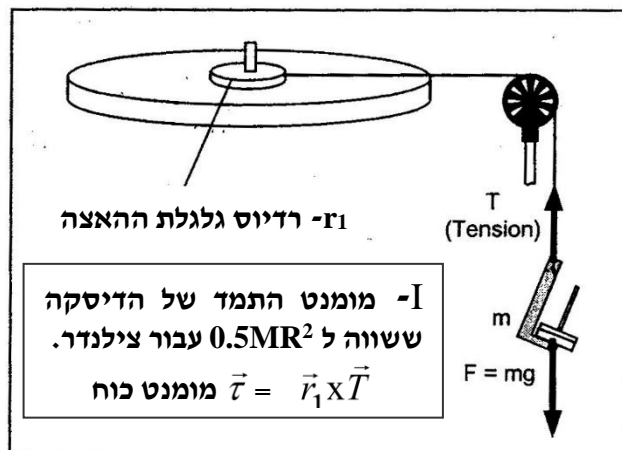
$$(6) \quad I = I_{c.m.} + Mh^2$$

כאשר h הוא המרחק ההסטה בין הציר העובר דרך מרכז המסה לציר האחר M מסת הגוף. מומנט התמד הוא גודל אדיטיבי, כלומר, מומנט ההתמד של גוף קשיח הבנוי משני חלקים הוא סכום מומנטי ההתמד של כל אחד מהחלקים (כאשר כל המומנטים מחושבים יחסית לאותו ציר).

1.3 מערכת המדידה

איור 3 מתאר באופן סכמטי את המערכת הניסיונית עם הכוחות שפועלים עליה בזמן שהמערכת מסתובבת.

איור 3: תיאור סכימטי של המערכת עם הכוחות הפועלים עליה



נכתוב את המשוואות המתארות את התנועה הקווית והזוויתית בהזנחת מומנט ההתמד של הגלגלת החכמה:

$$(7) \quad mg - T = ma$$

$$(8) \quad \tau = Tr_1 = I\alpha_1$$

-תנע זוויתי-

הקשר בין התאוצה הקווית והזוויתית :

$$(9) \quad a = r_1 \alpha_1$$

על ידי הצבה ניתן לחלץ את התאוצה הזוויתית של הדיסקה וגם כן את התאוצה הקווית של המסה.

$$(10) \quad T = mg - mr_1 \alpha_1$$

$$(11) \quad \tau = mgr_1 - mr_1^2 \alpha_1 = I \alpha_1$$

$$(12) \quad mg \cdot r_1 = I \cdot \alpha_1 + m \cdot r_1^2 \alpha_1$$

$$(13) \quad \alpha_1 = \frac{mgr_1}{I + mr_1^2} \approx \frac{mgr_1}{I}$$

בנוסחה (13) ניתן לבצע את הקירוב מכיוון שהביטוי mr_1^2 קטן ביחס למומנט ההתמד של הדיסקה I.

- ❖ ניתן להתנסות בסימולציה של תנע זוויתי.
- ❖ מומלץ לראות סרטון המסביר את הנושא.

1.4 שאלות הכנה

1. מומנט ההתמד של מוט דקיק, סביב ציר העובר במרכז המסה שלו וניצב אליו הוא: $I = \frac{1}{12} ML^2$. תוך שימוש במשפט שטיינר, חשב את מומנט ההתמד של אותו מוט סביב ציר העובר בקצה המוט וניצב לו.
- ב. חשב את מומנט ההתמד העובר ב-L/4 מאחד הקצוות.
2. באחד משלבי הניסוי המערכת המסתובבת מורכבת משני דסקות אחת בסיסית ודיסקה נוספת מונחת עליה ולהם מרכז משותף. חשב את מומנט ההתמד של המערכת המסתובבת.
3. נניח כי הדיסקה הבסיסית מסתובבת במהירות זוויתית $\omega_1 = 10 \text{ rad/sec}$ ומפילים עליה טבעת בעלת אותו מומנט התמד (I) אשר נדבקת לדיסקה מייד (כתוצאה מכוח חיכוך). אם לשני הגופים יש מרכז משותף חשב:
 - א. אילו חוקי שימור מתקיימים (תנע קווי, אנרגיה קינטית, תנע זוויתי)?
 - ב. חשב את המהירות הזוויתית של המערכת.
 - ג. בטא באמצעות I את כמות החום המכסימלית שיכולה להיווצר בהתנגשות.
 4. נתונים שני גלילים בעלי אותו רדיוס ומסה, אחד הגלילים מלא והשני חלול דק דופן שנהם מתגלגלים מאותה נקודה התחלתית וממצב מנוחה לאורך מישור משופע. בהגיעם לתחתית המישור מהירותו של מי מהם תהיה גבוהה יותר? נמק!

2. מהלך הניסוי

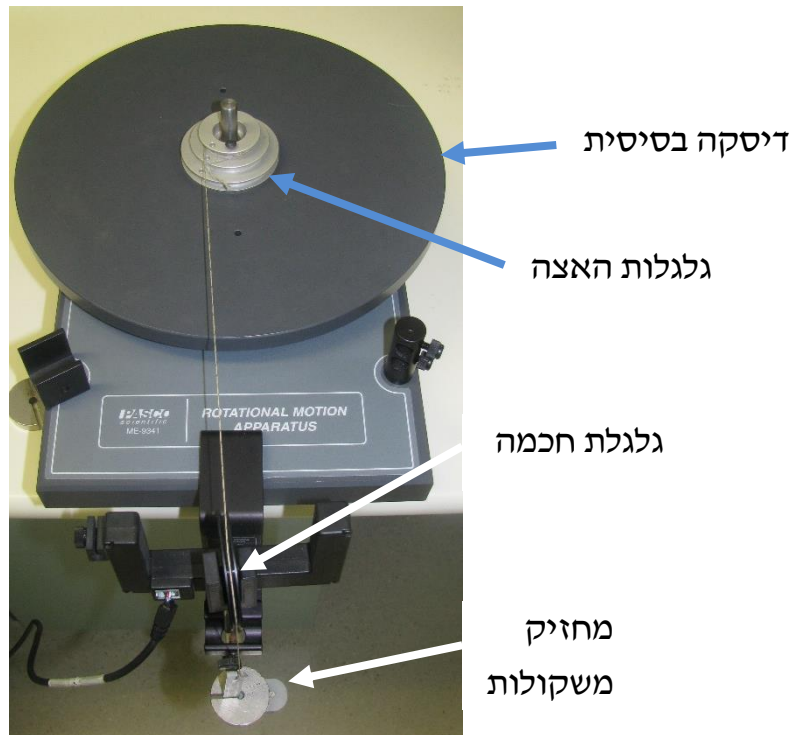
כאשר כוח גורם לגוף להסתובב, התאוצה הזוויתית של הגוף תלויה בארבעה גורמים:

1. הגודל של הכוח.
2. כיוון הפעולה של הכוח.
3. הנקודה על הגוף שעליה פועל הכוח.
4. מומנט ההתמד של הגוף.

הניסוי שלנו מחולק לשלשה חלקים:

2.1 בדיקת התרומה הכמותית של כל אחד מארבעת הגורמים שנזכרו לעיל לתאוצה

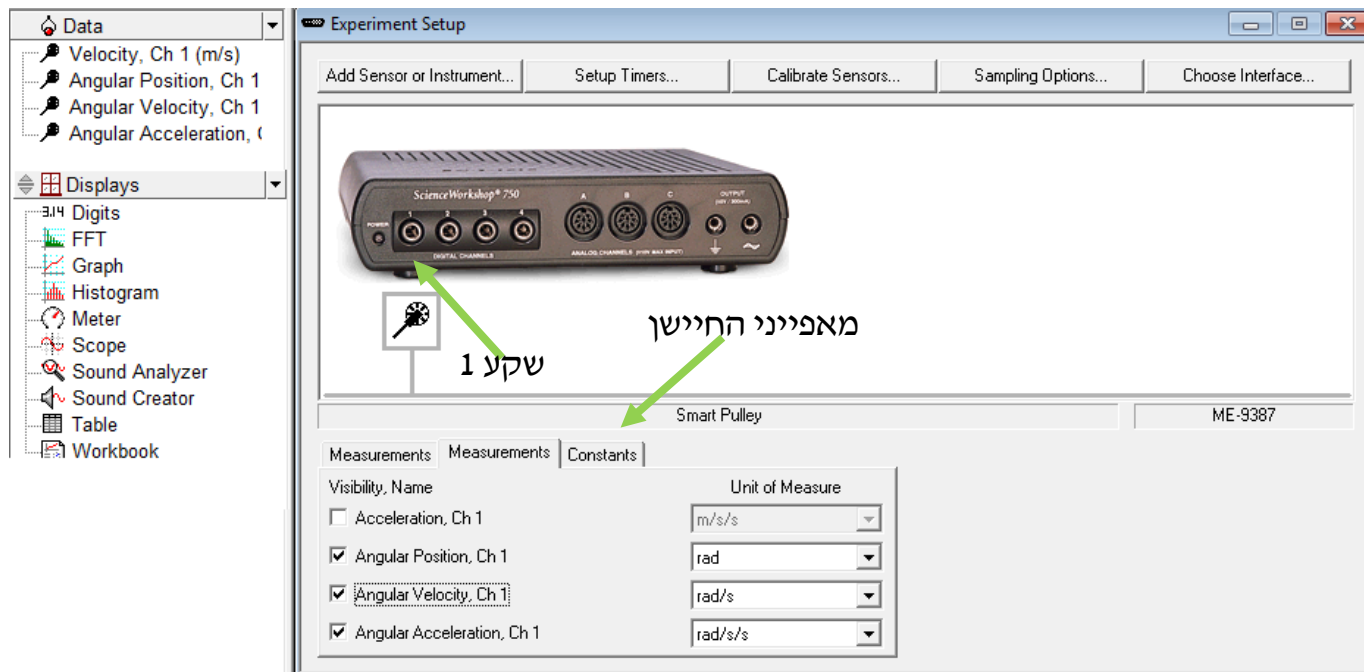
1. תבנו את המערכת המתוארת באיור 4. שימו את הדיסקה הבסיסית על המוט כך שגלגלות ההאצה למעלה.



איור 4: המערכת הניסיונית.

2. שימו את הפלס על הדיסקה וודאו שהיא אופקית ומאוזנת.
3. חברו את הגלגלת החכמה (smart pulley) לממשק מערכת המדידה.

4. בחלון ה- Experiment setup (איור 5) תלחצו על שקע 1 בתמונת הממשק ותבחרו גלגלת Smart Pulley מתוך רשימת החיישנים המוצעת.



איור 5: תיאור חלון הממשק המתאים לניסוי.

5. בחלק התחתון של חלון ה-setup מופיעים המאפיינים של הגלגלת (ראו איור 5). עקרון הפעולה של הגלגלת החכמה: הגלגלת מותקנת בין הזרועות של שער אופטי (ראו איור 6). בין הזרועות של השער, משודרת קרן אינפרא אדומה. הגלגלת עשויה 10 זרועות שביניהם 10 רווחים. כאשר הגלגלת מסתובבת בין הזרועות של השער האופטי, קרן האינפרא אדומה נגלית ונחסמת לסירווגין. ברגע שהקרן חסומה, מופעל מתח של 5 וולט. כאשר הקרן נגלית, יורד המתח לאפס. כאשר הקרן חסומה, נדלקת נורית הבקרה של השער האופטי. היקף הגלגלת הוא 15 ס"מ במדויק.

6. תלחצו על Measurements ותבחרו את הגדלים הנמדדים: (1 Angular position (rad), (2 Angular velocity (rad/s), (3 Angular acceleration (rad/s²).



איור 6: תיאור הגלגלת החכמה.

7. קחו חוט באורך כמטר, קשרו אותו בקצה הראשון לגלגלות ההאצה הקטנה ולפפו אותו סביבה.
8. וודאו שהחוט הקשור לגלגלת ההאצה ועובר מעל הגלגלת החכמה ניצב לרדיוס גלגלת ההאצה בנקודת ההשקה, וודאו גם שהוא מקביל לשולחן הניסוי.
9. בקצה השני של החוט תקשרו מחזיק משקולות והעמיסו עליו מסה של 50 gr.
10. עזבו את המסה, תנו לה לרדת מעט תוך סיבוב הדיסקה ומיד תלחצו על start.
11. תלחצו על stop לפני שהמסה פוגעת ברצפה.
12. חזרו על 8,9,10- עבור שתי מסות נוספות של 100 גרם ו 150 גרם.
13. חזרו על 8,9,10 עם הגלגלת בעלת הרדיוס הבינוני בשלושת המסות.
14. חזרו על 8,9,10 עם הגלגלת בעלת הרדיוס הגדול בשלושת המסות.

2.1.1. ניתוח תוצאות

תבנו במחברתכם טבלה הדומה לטבלה I והכניסו את הנתונים (עם השגיאות) של הניסויים שלכם לתוכה היעזרו בשלבים הבאים:
תמצאו את התאוצה הזוויתית שנמדדה ע"י שיפוע גרף המהירות הזוויתית והכניסו את הערכים לטבלה. שימו לב: התאוצה הזוויתית הנמדדת הינה התאוצה הזוויתית של הגלגלת החכמה.

א. לחישוב התאוצה הזוויתית של הדיסקה העיקרית אתה צריך להשתמש בקשר הנתון במשוואה 14. התאוצה הזוויתית של כל אחת מגלגלות ההאצה שווה לתאוצה הזוויתית של הדיסקה ולכן התאוצה של הדיסקה נתונה במשוואה הבאה

$$(14) \quad \alpha_1 = \frac{\alpha r}{r_1}$$

כאשר α_1 היא התאוצה הזוויתית של הדיסקה ושל גלגלת ההאצה, r_1 רדיוס גלגלת ההאצה, α ו r הם התאוצה הזוויתית והרדיוס של הגלגלת החכמה בהתאמה. ניתן למצוא את הנתונים המדויקים של r_1 ו- r ע"י טבלה II שנמצאת בסוף הפרק, עבור r השתמשו ברדיוס הקטן. חישבו את α_1 והכניסו את הערכים של α_1 ו- r_1 לטבלה I.

ב. חישבו את המתוחות ע"י משוואה (10) והוסיפו את התוצאות לטבלה.

ג. הראו שבעזרת הגרף של $\frac{T}{m}$ (כאשר m הוא קבוע) כפונקציה של α , ניתן

למצוא את הרדיוס r (מספיק להראות זאת בשביל אחת המסות). את הקשר

בין הגדלים ניתן למצוא בנוסחה (10) תוך שילוב עם נוסחה (14).

ד. תבנו גרף של התאוצה הזוויתית של הדיסקה (α_1) כפונקציה של רדיוס גלגלת

ההאצה, עבור תוצאות המדידה של $m = 50g$. חזרו על התהליך גם עבור

$m = 100g$. בעזרת נוסחה (13) חישבו את מומנט ההתמד.

ה. תבנו גרף של התאוצה הזוויתית של הדיסקה כפונקציה של הכוח הפועל עליה

עבור רדיוס גלגלת האצה הקטן. חזרו על התהליך גם עבור רדיוס האצה בינוני.

בעזרת נוסחה (13) חישבו את מומנט ההתמד.

ו. השוו את התוצאות שקיבלתם בסעיפים ד' וה' (סה"כ 4 גרפים) לתוצאה הידוע

לפי הוראות היצרן.

-תנע זוויתי-

התאוצה הזוויתית של הדיסקה $\alpha_1(\text{rad/sec}^2)$	התאוצה הזוויתית של הגלגלת החכמה $\alpha(\text{rad/sec}^2)$	רדיוס הגלגלת החכמה $r(\text{m})$	רדיוס גלגלת ההאצה $r_1(\text{m})$	המתיחות בחוט $T(\text{N})$	משקל המסה $mg(\text{N})$

טבלה I : ריכוז של תוצאות המדידה של הניסוי

רוחב (ס"מ)	אורך (ס"מ)	מומנט התמד (ק"ג-מ ²)	רדיוס (ס"מ)	רדיוס חיצוני (ס"מ)	רדיוס בתוך החריץ (ס"מ)	מסה (גר')	גוף
-	-	7.50×10^{-3}	R1=12.7	-	-	991	דיסקה בסיסית
-	-	7.22×10^{-3}	R2=12.7	-	-	894	דיסקה נוספת
-	-	18.6×10^{-7}	-	r=2.54	r=2.38	-	גלגלת חכמה
-	-	-	r ₁ =1.5 r ₁ =2 r ₁ =2.5	-	-	-	גלגלות האצה
5.1	22.2	2.98×10^{-3}	-	-	-	690	לוח מתכתי
-	-	2.64×10^{-3}	5.4	6.4		701	טבעת מתכתית

טבלה II : נתונים עבור הציוד שהשתמשתם בניסוי

2.2 התנגשויות עם גוף מסתובב

לגוף שמסתובב יש תנע זוויתי הנתון במשוואה 2. כשמפילים, בצורה אנכית, על דיסקת הבסיס, את הדיסקה הנוספת, אין שום מומנט כוח שפועל על המערכת המסתובבת בכיוון הסיבוב (חוץ ממומנט כוח חיכוך עם הציר). ולכן מתקיים חוק שימור תנע זוויתי:

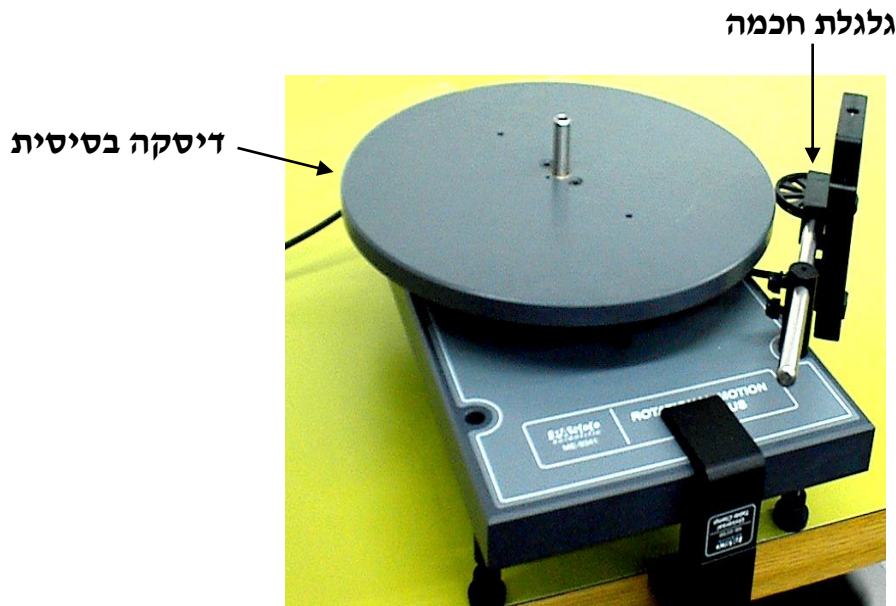
$$(15) \quad L_i = L_f$$

כאשר L_i מסמן את התנע הזוויתי לפני התנגשות ו- L_f מסמן את התנע הזוויתי אחרי התנגשות.

$$(16) \quad I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

כאשר I_i ו- ω_i מסמנים את מומנט ההתמד והמהירות הזוויתית של הגוף המסתובב לפני התנגשות בהתאמה, ו- I_f ו- ω_f מסמנים את מומנט ההתמד והמהירות הזוויתית של הגוף המסתובב אחרי התנגשות בהתאמה.

1. תבנו את המערכת המתוארת באיור 7. שימו את הדיסקה העיקרית על המוט כך שגלגלות ההאצה פונות למטה, וחברו את הגלגלת החכמה כך שהיקפה יהיה במגע עם הדיסקה הבסיסית, וכל סיבוב לדיסקה הבסיסית גורם לגלגלת החכמה להסתובב.



איור 7: מערכת הניסוי בהתנגשויות.

2. סובבו את הגלגלת הבסיסית ביד, תלחצו על start לאחר כ-5 שניות הפילו את הדיסקה הנוספת על דיסקת הבסיס ולאחר כ-5 שניות תלחצו על stop.
3. הציגו את המהירות הזוויתית של הדיסקה כפונקציה של זמן וחישוב אותה **רגע לפני ההתנגשות ורגע מיד אחרי ההתנגשות**.
4. חישוב את מומנט ההתמד של המערכת המסתובבת לפני הפלת הגוף ולאחר הפלתו. (מתוך טבלת הנתונים)
5. תבדקו אם התנע הזוויתי נשמר, הסבירו את תשובתכם.
6. חישוב את סך האנרגיה (אנרגיה רוטציונית) לפני ההתנגשות ואחריה. תבדקו האם האנרגיה נשמרת, הסבירו את תשובתכם (רמז: כדי לסובב את הדיסקה הנוספת מופעל עליה כוח כלשהו). תבדקו מה היחס בין האנרגיות לפני ואחרי ההתנגשות כאשר יש שימור תנע זוויתי.

2.3. שימור אנרגיה גרביטציונית ורוטציונית

במערכת שלנו ישנו גלגול אנרגיה מאנרגיה פוטנציאלית גרביטציונית לאנרגיה קינטית רוטציונית ואנרגיה קינטית של העתקה.

השינוי באנרגיה הפוטנציאלית הגרביטציונית נתון בביטוי $E_p = mgh$ כאשר E_p הוא השינוי באנרגיה פוטנציאלית, m - מסת הגוף, g - תאוצת הנפילה החופשית ו- h הפרש הגבהים.

האנרגיה הקינטית של העתקה נתונה בביטוי $E_{kt} = \frac{1}{2}mV^2$, כאשר E_{kt} היא האנרגיה הקינטית של העתקה, m - מסת הגוף ו- V מהירות הגוף.

האנרגיה הקינטית הרוטציונית נתונה בביטוי $E_{kr} = \frac{1}{2}I\omega_1^2$, כאשר E_{kr} היא האנרגיה הקינטית הרוטציונית, I - מומנט התמד ו- ω_1 - המהירות הזוויתית של הדיסקה.

לאחר הגדרת המשתנים שמופיעים מטה, חזרו על סעיפים 1-11 מהסעיף 2.1 (עבור $m = 50g$ ורדיוס גלגלת ההאצה $r = 2.5cm$) בפרויקט חדש.

נגדיר כמה גדלים בתוכנה (שימו לב שהיחידות הם MKS):

א. תבחרו בחלון calculate, ורישמו את המשוואה הנ"ל:

$$h = -r * z$$

כאשר: h - הפרש הגובה בין המצב העכשווי של המסה והמצב ההתחלתי.

r - רדיוס הגלגלת החכמה.

z - זווית הסיבוב של הגלגלת החכמה.

תלחצו accept. תלחצו על הלשונית לצדו של r והזינו אותו כ-constant לפי הנתון בטבלה II.

תלחצו על הלשונית לצדו של z והגדר אותו כ-data measurement. תבחרו ב-Angular position. תלחצו accept.

כעת מוגדר המשתנה החדש h.

ב. להגדרת המשתנה החדש הנוסף תלחצו על calculate ותבחרו ב-new. הכניסו את המשוואה:

$$E_p = m * g * h$$

כאשר: E_p - השינוי באנרגיה הפוטנציאלית

m - המסה של הגוף

g - תאוצת הנפילה החופשית.

קבעו את m ו-g כ-constant והזינו את הנתונים.

את h הגדירו כ-data measurement ותבחרו את המשתנה h שהגדרתם מקודם.

ג. הגדירו משתנה חדש: $V = r * w$ (לא לשכוח לסמן כפל בין משתנים ב- $(r * w)$)

כאשר V - המהירות הקווית של המסה; w - המהירות הזוויתית של הגלגלת

החכמה, r - רדיוס הגלגלת החכמה.

הגדירו את w כ-data measurement ותבחרו Angular velocity. את r הזינו כ-

constant כמו מקודם.

ד. הגדירו משתנה חדש: $E_{kt} = \frac{1}{2} m V^2$ ($E_{kt} = 0.5 * m * \text{pow}(V, 2)$)

כאשר E_{kt} - האנרגיה הקינטית של העתקה עבור המסה היורדת.

הגדירו את m כ-constant ו V כ-data measurement ותבחרו את המשתנה V.

ה. הגדירו משתנה חדש: $w_1 = \frac{w * r}{r_1}$

כאשר w_1 הוא המהירות הזוויתית של הדיסקה ושל גלגלת ההאצה, r_1 רדיוס גלגלת

ההאצה, r ו- w הם המהירות הזוויתית והרדיוס של הגלגלת החכמה בהתאמה.

הגדירו את r ו- r_1 כ-constant, ואת w כ-data measurement ותבחרו Angular

velocity.

-תנע זוויתי-

$$E_{kR} = \frac{1}{2} I \omega_1^2 : \text{ הגדירו משתנה חדש}$$

כאשר E_{kR} - האנרגיה הקינטית הרוטציונית של הדיסקה. (האנרגיה הקינטית הרוטציונית של הגלגלת החכמה זניחה).

הגדירו את I כ-constant (לפי הנתונים של היצרן), ואת $w1$ כ- data measurement ותבחרו את המשתנה $w1$.

$$E_{total} = E_{kR} + E_{kT} + E_p : \text{ הגדירו משתנה חדש}$$

הגדירו את E_{kR} כ- data measurement ותבחרו את המשתנה E_{kR} .

הגדירו את E_{kT} כ- data measurement ותבחרו את המשתנה E_{kT} .

הגדירו את E_p כ- data measurement ותבחרו את המשתנה E_p .

הערה: במצב האידיאלי סכום האנרגיות שווה:

$$-mgh + \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2} = 0$$

2.3.1. ניתוח תוצאות

א. ציירו את העקומות של האנרגיות: E_{kR} , E_{kT} , E_p כפונקציה של הזמן באותה מערכת צירים (בגרף אחד). בחנו את העקומות המתקבלות ותקבעו אם צורתם (קבוע, ליניארי, פרבולי...) תואמת את התיאוריה.

ב. תבנו גרף של סה"כ האנרגיה הגרביטציונית והקינטית בשני סוגיה (E_{total}) כפונקציה של זמן.

ג. במצב האידיאלי ובהעדר חיכוך סכום האנרגיות צריך להיות אפס (חוק שימור האנרגיה). בניסוי זה הזנחנו את החיכוך. לפי התוצאות שהתקבלו בגרף מסעיף ב, בחנו אם אכן הפסדי האנרגיה בחיכוך קטנים ואכן ניתנים להזנחה.