העברה והחזרה של פונקציית הגל

הערה על טרמינולוגיה: במכניקת הקוונטים משתמשים במילה "פוטנציאל" לתיאור האנרגיה הפוטנציאלית של חלקיק. לכן בכל מקום בו רשום פוטנציאל בהרצאות, בתרגולים ובספרים שמדברים על תורת הקוונטים הכוונה היא לאנרגיה פוטנציאלית.

ראינו כי חלקיק מתואר בתורת הקוונטים ע"י פונקציית הגל שלו. אם אנחנו יודעים את פונקציית הגל נוכל לחשב את ההסתברות להמצאות החלקיק במצב כלשהו (למשל במיקום x או בתנע p).

כאשר למדנו על גלים דיברנו על מעבר של גל בין תווכים שונים (למשל חומרים עם מקדמי שבירה שונים עבור אור או מיתרים בעובי שונה עבור גל במיתר) וראינו שבמעבר בין תווכים שונים חלק מהגל יעבור וחלקו יוחזר. נרצה לעשות דבר דומה עבור פונקציית הגל של חלקיק. כלומר להבין מה קורה לחלקיק כאשר הוא עובר בין תווכים שונים.

הערה: חלקיק מתואר ע"י חבילת גלים. אולם הרבה יותר קל לפתור את משוואת שרדינגר עבור חלקיק בעל מספר גל יחיד (כלומר, בעל תנע נתון). לכן אנחנו נפתור רק בעיות בהן לחלקיק יש תנע נתון. אם נרצה אחרכך לחשב מה קורה לחלקיק אמיתי (חבילת גלים) נוכל לפתור עבור כל אורך גל בנפרד ואז לחבר את הפתרונות לקבלת הפתרון עבור חבילת הגלים שלנו (ע"י טרנספורם פורייה) אך זה מעבר לרמה הנדרשת בקורס זה.

פתרון משוואת שרדינגר עבור פוטנציאל קבוע

הבעיה שנרצה לפתור היא מעבר של חלקיק בין איזורים שונים, כאשר הפוטנציאל שונה באזורים שונים אך בתוך כל איזור הפוטנציאל קבוע. לצורך כך נצטרך תחילה לפתור את משוואת שרדינגר בכל איזור בנפרד ולאחר מכן נשתמש בתנאי השפה. עבור פוטנציאל קבוע כלשהו $U(x) = U_0$ משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן תהיה:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + U_0\psi(x) = E\psi(x)$$

נסדר את המשוואה בצורה מוכרת:

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\psi(x)$$

כעת ישנן שתי אפשרויות:

1. $E > U_0$: במקרה זה נסמן $k^2 = \frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2} > 0$ ונקבל את משוואת המתנד ההרמוני המוכרת:

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -k^2\psi(x)$$

שפתרונה (נעדיף לעבוד, כמו במקרה של העברה והחזרה של גלים, עם פונקציות מרוכבות ולא סינוסים וקוסינוסים):

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

הערה: נזכר כי הפתרון למשוואת שרדינגר הוא $\psi\left(x\right)e^{-i\omega t}$ ולכן אם $\psi\left(x\right)=e^{ikx}$ אז $\psi\left(x,t\right)=e^{-i\left(\omega t-kx\right)}$, זהו גל שנע ימינה. אם $\psi\left(x\right)=e^{-ikx}$ אז $\psi\left(x,t\right)=e^{-i\left(\omega t+kx\right)}$ וזהו גל שנע שמאלה.

2. $E<U_0$: במקרה זה נסמן $\alpha^2=\frac{2m\left(U_0-E\right)}{\hbar^2}>0$ ונקבל את המשוואה:

$$\frac{\partial^2\psi\left(x\right)}{\partial x^2}=\alpha^2\psi\left(x\right)$$

שפתרונה:

$$\psi\left(x\right)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$$

תנאי שפה:

כעת נרצה למצוא את המקדמים בתחומים השונים. נעשה זאת ע"י תנאי השפה הבאים:

1. במעבר בין איזור עם פוטנציאל סופי לאיזור אחר עם פוטנציאל סופי פונקציית הגל ונגזרתה צריכות להיות רציפות (כפי שהוכחתם בתרגיל הבית)
2. במעבר מאיזור עם פוטנציאל סופי לאיזור עם פוטנציאל אינסוף פונקציית הגל צריכה להיות רציפה, וכיוון שההסתברות של חלקיק להיות באיזור עם פוטנציאל אינסופי היא 0 פונקציית הגל חייבת להתאפס במעבר כזה.
3. בתחומים שאינם סגורים פונקציית הגל לא יכולה להתבדר. כלומר, אם יש לנו תחום שנמשך עד $x=-\infty$ שהפוטנציאל בו גבוה מאנרגיית החלקיק הפתרון יהיה $\psi\left(x\right)=Ae^{\alpha x}$ ואם התחום נמשך עד $x=\infty$ הפתרון יהיה $\psi\left(x\right)=Ae^{-\alpha x}$.
4. בנוסף יש לנו את תנאי הנרמול שגם הוא יקשר לנו בין המקדמים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(x\right)\right|^2dx=1$$

נקבל 2 משוואות לכל מעבר בין איזורים ושני מקדמים שצריך למצוא לכל מעבר כזה (בקטעים שבקצוות יהיה רק מקדם אחד לכל קטע). בנוסף תהיה לנו משוואה נוספת מתנאי הנרמול. כלומר יש לנו משוואה אחת יותר ממספר המקדמים. המשתנה הנוסף שהמשוואות האלו יקבעו הוא E, האנרגיות העצמיות (שימו לב שאלו לא משוואות לינאריות עבור E ולכן ל E יכולים להיות הרבה פתרונות).

מנהור

אחת התוצאות המפתיעות של מכניקת הקוונטים היא שחלקיק יכול לעבור איזור שבו האנרגיה שלו קטנה מהאנרגיה הפוטנציאלית. במכניקה קלאסית הדבר לא אפשרי, זה כאילו שכדור יתגלגל במהירות מאוד איטית לכיוון גבעה גבוהה ויעבור לצד השני שלה בלי להגיע לפסגה, האנלוגיה הזו נתנה לתופעה את שמה "מנהור". תוצאה זו מתקבלת ישירות מהתוצאה שקיבלנו: באיזור בו הפוטנציאל גדול מאנרגיית החלקיק מתקבל פתרון של אקספוננט דועך

(וגם אקספוננט עולה אבל תמיד המקדם שלו יהיה הרבה יותר קטן). כלומר, אם המחסום לא רחב מדי, יש לחלקיק הסתברות לא זניחה לעבור את המחסום.

הערה: בלי מנהור השמש לא הייתה יכולה להפיק אנרגיה. האנרגיה (אור וחום) מהשמש מופקת כתוצאה (בעיקר) מהיתוך אטומים של מימן לאטום הליום. בכדי שזה יקרה צריך פרוטון להתקרב מספיק לפרוטון אחר בכדי שהכח הגרעיני החזק, שהוא כח קצר טווח, יגרום לפרוטונים להצמד ולהפוך לגרעין הליום. בכדי שזה יקרה הפרוטונים צריכים להתגבר על הדחייה החשמלית ביניהם. ללא מנהור הפרוטונים היו צריכים לנוע בשביל זה במהירויות גבוהות כלכך, שהשמש הייתה צריכה להיות חמה הרבה יותר ממה שהיא באמת. בזכות המנהור הפרוטונים יכולים להתגבר על הדחייה החשמלית ביניהם גם בטמפרטורת השמש, כלומר גם אם הם איטיים מדי בכדי לעבור מעל מחסום הפוטנציאל.

דוגמה: מנהור דרך מחסום פוטנציאל- שאלה ממבחן מועד א 2016.

מעבר מחסום פוטנציאל (לקוח מפיסיקה 3ב מועד א 2016)

חלקיק בעל מסה m ומספר גל k_1 נשלח משמאל למחסום פוטנציאל מרובע ברוחב d ובגובה V. אנרגיית החלקיק נמוכה מ V.

א. האם ניתן להשתמש בבעיה במשוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן? מהי המשוואה שיש לפתור בכל איזור (מימין למחסום, משמאל למחסום ובתוך המחסום)?

ב. מהם הפתרונות בכל איזור? מהם תנאי השפה שחלים על הפתרונות?

ג. כיצד ניתן לחשב את סיכוי החלקיק לעבור את המחסום? (אין צורך בפתרון מלא).

ד. אם מניחים שפונקציית הגל ונגזרתה רציפות בכל מקום, הוכח כי פונקציית צפיפות ההסתברות $p\left(x\right)$ רציפה בכל מקום. השתמש בתכונה זו בכדי להסביר מדוע פונקציית הגל בתוך המחסום לא יכולה להיות מתוארת רק על ידי אקספוננט דועך בלבד.

ה. צייר ציור סכמטי של צפיפות ההסתברות $p\left(x\right)$ בתחומים השונים לגל שנע משמאל לימין. צייר גם עבור אנרגיה קטנה מאנרגיית המחסום וגם עבור אנרגיה גדולה ממנו. הסבר מדוע $p\left(x\right)$ נראית כך.

פתרון

א. אם נקבע את ראשית הצירים בצדו השמאלי של המחסום הפוטנציאל בשאלה יהיה $U\left(x\right)=\begin{cases}V & 0<x<d\\ 0 & else\end{cases}$. זהו פוטנציאל שאינו תלוי בזמן ולכן ניתן להשתמש במשוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן.

המשוואה שיש לפתור משמאל למחסום או מימין למחסום היא:

$$\frac{\partial^2\psi\left(x\right)}{\partial x^2}=-k^2\psi\left(x\right)\quad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

ובתוך המחסום:

$$\frac{\partial^2\psi\left(x\right)}{\partial x^2}=\alpha^2\psi\left(x\right)\quad \alpha^2=\frac{2m\left(V-E\right)}{\hbar^2}$$

ב. הפתרון משמאל למחסום:

$$\psi\left(x\right)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}=Ae^{ikx}+rAe^{-ikx}$$

כאשר $r=\frac{B}{A}$ הוא מקדם ההחזרה.

הפתרון בתוך המחסום:

$$\psi\left(x\right)=Ce^{\alpha x}+De^{-\alpha x}$$

הפתרון מימין למחסום הינו רק גל שנע ימינה (כי נתון בשאלה שהגל מגיע משמאל):

$$\psi(x) = Fe^{ikx} = tAe^{ikx}$$

כאשר $t = \frac{F}{A}$ הוא מקדם ההעברה.
תנאי השפה שחלים על הפתרונות נובעים מרציפות פונקציית הגל ונגזרתה בכל מעבר:
מרציפות ב $x = 0$:

$$A + rA = C + D$$

מרציפות ב $x = d$:

$$Ce^{\alpha d} + De^{-\alpha d} = tAe^{ikd}$$

מרציפות נגזרת ב $x = 0$:

$$ikA - ikrA = \alpha C - \alpha D$$

מרציפות נגזרת ב $x = d$:

$$\alpha Ce^{\alpha d} - \alpha De^{-\alpha d} = iktAe^{ikd}$$

הערה: במקרה זה לא ניתן לנרמל את הפונקציה כי האינטגרל מ$x = -\infty$ ל $x = \infty$ מתבדר. זה נובע מכך שפונקציית הגל שבחרנו, בה יש לחלקיק תנע מדוייק, אינה פיסיקאלית. חלקיק פיסיקאלי תמיד יתואר ע"י חבילת גלים ולכן יהיה ניתן לנרמל את פונקציית הגל שלו.

ג. נחשוב על חבילת גלים שמגיעה למחסום אם נחכה זמן ארוך, τ לאחר שפונקציית הגל עברה את המחסום פונקציית הגל שלו תתקדם למרחק $x = v\tau$ כאשר מהירות החלקיק היא מהירות החבורה$\frac{\hbar k_1}{m} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk} = \frac{d\omega}{dk_1} = v_g$. ולכן ההסתברות למצוא אותו מימין למחסום תהיה:

$$P_{transition} = \int_d^{d+v\tau} |\psi(x)|^2 \, dx = \int_d^{d+v\tau} |tA|^2 \, dx = v\tau \, |tA|^2$$

בנוסף חבילת הגלים צריכה להיות מנורמלת לפני שהיא פוגעת במחסום (אם τ מספיק גדול המרחק $v\tau$ יכלול את כל פונקציית הגל) ולכן
$1 = \int_{-v\tau}^{0} |\psi_{initial}(x)|^2 \, dx = \int_d^{d+v\tau} |A|^2 \, dx = v\tau \, |A|^2$
נקבל כי ההסתברות לעבור את המחסום היא:

$$P_{transition} = v\tau \left|tA\right|^2 = \left|t\right|^2$$

הערה: באופן כללי ניתן תמיד לחשב את הסתברות המנהור כ

$$\frac{\left|\psi_{transsmited}\left(x\right)\right|^2 v_{transmitted}}{\left|\psi_{initial}\left(x\right)\right|^2 v_{initial}}$$

כאשר $\psi_{transsmited}\left(x\right)$ היא פונקציית הגל לאחר מעבר המחסום, $v_{transsmited}$ מהירות החבורה לאחר מעבר המחסום, $\psi_{initial}\left(x\right)$ היא פונקציית הגל לפני מעבר המחסום ו$v_{initial}$ מהירות החבורה לפני מעבר המחסום.

ד. פונקציית צפיפות ההסתברות נתונה ע"י $p\left(x\right) = \left|\psi\left(x\right)\right|^2 = \psi^*\left(x\right)\psi\left(x\right)$, אם $\psi\left(x\right)$ רציפה גם $\psi^*\left(x\right)$ רציפה ולכן גם מכפלתן, שנותנת את צפיפות ההסתברות, רציפה. הנגזרת של צפיפות ההסתברות הינה:

$$\frac{dp\left(x\right)}{dx} = \frac{d\psi^*\left(x\right)}{dx}\psi\left(x\right) + \psi^*\left(x\right)\frac{d\psi\left(x\right)}{dx}$$

אם נגזרת פונקציית הגל רציפה גם הנגזרת $\frac{d\psi^*(x)}{dx}$ רציפה. אם כך $\frac{dp(x)}{dx}$ היא מכפלה וחיבור של פונקציות רציפות, ולכן גם רציפה.

נניח כי פונקציית הגל הייתה יכולה להיות מתוארת רק על ידי אקספוננט דועך, כלומר $C = 0$ בסימונים שלנו. אם כך, צפיפות ההסתברות בתוך המחסום תהיה $\left|D\right|^2 e^{-2\alpha x}$ ומימין למחסום $\left|tA\right|^2$.

נגזרת צפיפות ההסתברות צריכה להיות רציפה במעבר בין תחומים אלו. הנגזרת בתוך המחסום היא $-2\alpha\left|D\right|^2 e^{-2\alpha x}$ ומימין למחסום 0 ובכדי שהפונקצייה תהיה רציפה צריך להתקיים:

$$-2\alpha\left|D\right|^2 e^{-2\alpha L} = 0$$

משוואה זו מתקיימת רק אם $\alpha = 0$ או ש $D = 0$, בשני המקרים נקבל בתוך המחסום פונקצייה שאיננה אקספוננט דועך (0 אם $D = 0$ ו D אם $\alpha = 0$). לכן פונקציית הגל בתוך המחסום לא יכולה להיות מתוארת רק על ידי אקספוננט דועך.

ה.

עבור אנרגיה שקטנה מV: (ראה איור 1)

משמאל למחסום ישנו גל שמגיע למחסום וגל שמוחזר מהמחסום שני הגלים האלו יתאבכו וייצרו נקודות בהן צפיפות ההסתברות קטנה יותר ונקודות בהן צפיפות ההסתברות גדולה יותר.

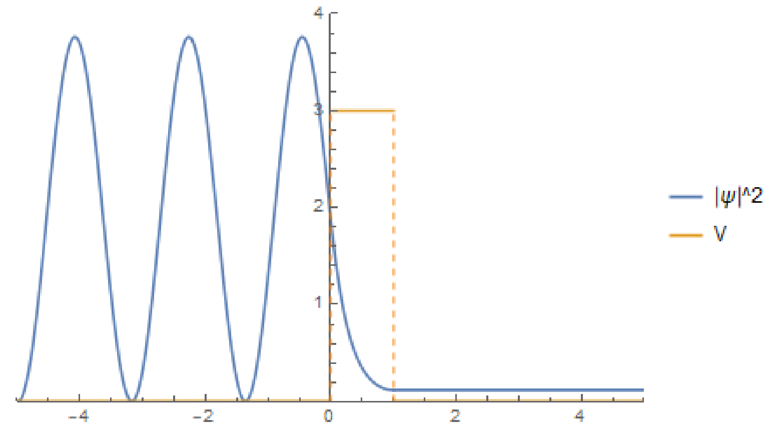
בתוך המחסום פונקציית הגל בעיקר דועכת, ניתן לראות זאת ע"י פתרון של המשוואות אך גם אינטואטיבית שכן ככל שהמחסום רחב יותר נצפה להסתברות יותר נמוכה לעבור אותו.

מימין למחסום צפיפות ההסתברות קבועה: $\left|tA\right|^2$.

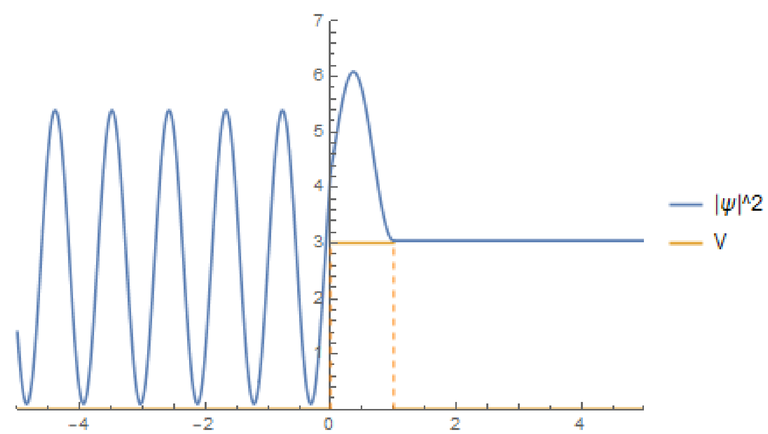
עבור אנרגיה שגדולה מ V: (ראה איור 2)

השינוי קורה רק בתוך המחסום שם כעת יש פתרון של גלים. הגל שנע ימינה מתאבך עם הגל שנע שמאלה כך שגם בתוך המחסום יווצרו נקודות עם התאבכות בונה או הורסת.

.



איור 1: צפיפות ההסתברות כפונקציה של המקום. x נמדד ביחידות של d, צפיפות ההסתברות ביחידות של A עבור הפרמטרים $\frac{\sqrt{mV}}{\hbar} = 1, E = 0.5V$



איור 2: צפיפות ההסתברות כפונקציה של המקום. x נמדד ביחידות של d, צפיפות ההסתברות ביחידות של A עבור הפרמטרים $E = 2V$, $\frac{\sqrt{mV}}{\hbar} = 1$.