אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: 10/04/2022, 09:00
שם המרצה: ד״ר שירה ציפמן
שם המתרגל: מר אסף ארזי
שם הקורס: תורת הכבידה 1
מספר הקורס: 203.1.4181
שנה: 2021/22 סמסטר: א׳ מועד: ג׳
משך הבחינה: 4 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות המצורף לטופס

<u>יש לענות על 3 שאלות בלבד (בחירה מתוך 4) ולציין בתחילת מחברת הבחינה אילו שאלות בחרתם</u>. אחרת, יבדקו שלוש השאלות המופיעות ראשונות מתחילת המחברת.

<u>ערך כל שאלה הוא 40 נקודות.</u>

1. המשוואה הגיאודזית (40 נקודות)

א. פתחו את המשוואה הגיאודזית מתוך הלגרנז'יאן **(10 נקודות)**

$$L=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

נתונה מטריקה של שדה חלש וסטטי

$$ds^2=-(1+2\phi)dt^2+(1-2\phi)(dx^2+dy^2+dz^2)$$

כאשר $\phi=\phi(x^i)\ll 1$.

ב. כתבו את הלגרנז'יאן של חלקיק חופשי תחת השפעת שדה כבידה חלש וסטטי לפי נתון סעיף א׳. מצאו את המשוואות הגאודזיות מתוך הלגרנז׳יאן עבור $t(\tau)$ ועבור $x^i(\tau)$ (רמז: השתמשו ישירות במשוואות אוילר לגרנז׳). **(10 נקודות)**

ג. בטאו את $\frac{dx^i}{d\tau}$ ואת $\frac{d^2x^i}{d\tau^2}$ באמצעות: $\frac{dt}{d\tau}$, $\frac{d^2t}{d\tau^2}$, המהירות $v^i\equiv\frac{dx^i}{dt}$ והתאוצה $a^i\equiv\frac{d^2x^i}{dt^2}$. הציבו קשרים אלו לתוך המשוואות הגאודזיות. **(10 נקודות)**

ד. מצאו צירוף של המשוואות הגאודזיות שתלוי רק במהירות, בתאוצה וב-ϕ (ולא ב-$\frac{dt}{d\tau}$, $\frac{d^2t}{d\tau^2}$). הראו שעבור שדה חלש ומהירויות לא יחסותיות, בקירוב ליניארי ב-ϕ ו-v^2, משוואת זו היא החוק השני של ניוטון עבור חלקיק חופשי בשדה כבידה ניוטוני. **(10 נקודות)**

2. מסלולי קרני אור בגאומטריית שוורצשילד (40 נקודות)

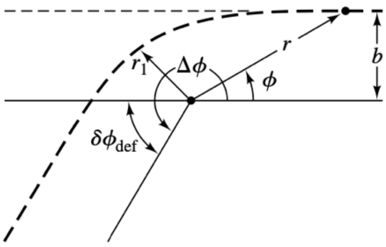
נתונה מטריקת שוורצשילד

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)$$

א. מצאו שני גדלים שמורים בתנועה לאורך גיאודזות. **(8 נקודות)**

ב. פתחו את הפוטנציאל האפקטיבי $W_{eff}(r)$, עבור קרני אור הנעות במטריקת שוורצשילד במישור המשווה $\theta=\frac{\pi}{2}$. הפוטנציאל מוגדר לפי המשוואה: $\frac{1}{b^2}=\frac{1}{l^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+W_{eff}(r)$ כאשר $b\equiv\frac{l}{e}$ איפה ש-l הוא התנע הזוויתי ו-e היא האנרגיה. **(8 נקודות)**

ג. מצאו את רדיוס של מסלול גאודזי מעגלי שבו קרני האור יכולות להסתובב במעגל. האם הוא יציב? **(8 נקודות)**



ד. בטאו את השינוי הזוויתי $\Delta\phi$ של קרני האור במסלול בעל פרמטר פגיעה b מסביב לגוף מסיבי במסה M בתור אינטגרל על r. **(8 נקודות)**

ה. בצעו את האינטגרל מן הסעיף הקודם ומצאו את הסטייה הזוויתית $\delta\phi_{def} = \Delta\phi - \pi$ בסדר ראשון ב- $\frac{M}{b} \ll 1$ (רמז: השתמשו בהחלפת המשתנים $w = \frac{b}{r}$, אינטגרלים שימושיים מופיעים בדף הנוסחאות). **(8 נקודות)**

3. מטריקת שוורצשילד בקואורדינטות קרוסקל (40 נקודות)

א. בצעו את מעבר הקואורדינטות של מטריקת שוורצשילד מקואורדינטות שוורצשילד (t, r, θ, ϕ) לקואורדינטות קרוסקל (V, U, θ, ϕ)

עבור $r > 2M$

$$U = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$V = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

עבור $r < 2M$

$$U = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$V = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

וקבלו את אלמנט האורך (תוכלו לגזור את אלמנט האורך עבור אחד המקרים $r > 2M$ או $r < 2M$ לבחירתכם) **(10 נקודות)**

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}}(-dV^2 + dU^2) + r^2 d\Omega^2$$

שני צופים מרחפים בשתי חלליות מחוץ לחור שחור בעל מסה M, ברדיוס קבוע R ובמיקום זוויתי קבוע. R נתון כך: $\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{R}{4M}} = \frac{1}{2}$

הצופה הראשון עוזב מיקום זה בזמן שוורצשילד $t = 0$ ומטייל בתוך החור השחור על קו ישר **בדיאגרמת קרוסקל** (שבה הצירים הם U, V) עד אשר מושמד בסינגולריות בדיוק היכן ש-$U = 0$.

הצופה השני נשאר באותו R.

ב. רשמו משוואות המתארות קווים של רדיוס קבוע במונחי U,V. רשמו משוואות המתארות את קווי-העולם של שני הצופים, את האופק ואת מיקומה של הסינגולריות במונחי U,V. שרטטו את כל האובייקטים האלו בדיאגרמת קרוסקל. **(10 נקודות)**

ג. האם הצופה שנכנס לתוך החור השחור נע על *timelike worldline*? נמקו את תשובתכם בעזרת חישוב מפורש. **(10 נקודות)**

ד. מהו זמן שוורצשילד t המאוחר ביותר מאז הפרידה בו יכול הצופה שנשאר בחוץ לשלוח אור שיגיע לצופה שנכנס פנימה, לפני שיושמד בסינגולריות? **(10 נקודות)**

4. Milne Universe **(40 נקודות)**

א. כתבו את משוואת פרידמן עבור יקום עקום ריק וללא קבוע קוסמולוגי. על מנת שיהיה פתרון למשוואה, האם היקום פתוח או סגור? **(7 נקודות)**

ב. התייחסו למשוואת פרידמן כאל משוואת אנרגיה, עבור חלקיק עם קואורדינטה a. מהי האנרגיה הפוטנציאלית? מהי האנרגיה הכוללת? סרטטו אותן על גרף, ותארו במילים את מסלולו של חלקיק המתחיל לנוע מהראשית עם מהירות חיובית. סרטטו גרף איכותי של $a(t)$, ותארו במילים את התפתחות היקום. **(10 נקודות)**

ג. מצאו את מטריקת *FRW* עבור היקום הנ"ל בקואורדינטות (t,χ,θ,ϕ), עם תנאי התחלה $a(0)=0$. **(7 נקודות)**

ד. הראו שהמטריקה שקיבלתם בעצם מתארת את מרחב מינקובסקי. ניתן לענות באחת משתי הדרכים הבאות: לחשב את כל רכיבי טנזור רימן ולמצוא שהם מתאפסים, או למצוא טרנספורמציה מקואורדינטות אינרציאליות. **(16 נקודות)**

להלן הדרכה לדרך השניה. המטריקה שמצאתם היא בקואורדינטות המחלקות את החלק של מרחב מינקובסקי אשר בתוך קונוס האור של הראשית למשטחי היפרבולואידים תלת מימדיים דמויי מרחב, בעלי רדיוס משתנה t. הראו זאת לפי השלבים הבאים:

(i) כתבו את אלמנט האורך של מרחב מינקובסקי בקואורדינטות אינרציאליות (u,x,y,z).

(ii) כתבו משוואת היפרבולואיד במרחב מינקובסקי 4 ממדי עם רדיוס בריבוע שלילי $-t^2$.

(i) בטאו את הקואורדינטות (x,y,z) באמצעות קואורדינטות ספריות (r,θ,ϕ). כיצד נראית משוואת ההיפרבולואיד מהסעיף הקודם במונחי הקואורדינטות החדשות?

(iii) כתבו את מרחב (u,r) בקואורדינטות היפרבוליות-פולריות עם קואורדינטה רדיאלית t וזווית היפרבולית χ.

(iv) בטאו את מטריקת מינקובסקי בקואורדינטות (t,χ,θ,ϕ).

בהצלחה!

דף נוסחאות: תורת הכבידה 1

נוסחאות כלליות

החלפת קואורדינטות במטריקה

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}g_{\mu\nu} \qquad ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

חוק טרנספורמציה של טנזור כללי

$$T^{\mu_1'\mu_2'\dots\mu_k'}{}_{\nu_1'\nu_2'\dots\nu_\ell'} = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_k'}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_\ell}}{\partial x^{\nu_\ell'}}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_\ell}$$

סימני קריסטופל

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

נגזרת קווריאנטית

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}V^\lambda \qquad \nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V_\lambda$$

נגזרת קווריאנטית של המטריקה

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}g_{\mu\lambda}$$

נגזרת קווריאנטית של טנזור כללי

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_\ell} =& \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_\ell} \\ &+ \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda}T^{\lambda\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_\ell} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda}T^{\mu_1\lambda\dots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_\ell} + \cdots \\ &- \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\dots\nu_\ell} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\dots\nu_\ell} + \cdots\end{aligned}$$

טנזור העקמומיות של רימאן

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} \qquad R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

זהויות וקשרים בטנזור העקמומיות של רימאן

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \qquad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

זהויות ביאנקי

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \qquad \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

טנזור וסקלר העקמומיות של ריצ'י

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \qquad R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \qquad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

טנזור איינשטיין וזהות ביאנקי

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} \qquad \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

משוואת איינשטיין עם קבוע קוסמולוגי Λ -

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

(לחילופין, יש שנוהגים לכלול את הקבוע הקוסמולוגי בהגדרת טנזור התנע-אנרגיה)

המשוואה הגאודזית

לגרנזיאן עבור המשוואה הגאודזית של חלקיק בוחן עם פרמטר שרירותי σ לאורך קו העולם של החלקיק $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$:

$$L\left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha\right) = \left(-g_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)^{1/2}$$

משוואה גאודזית עבור חלקיק בוחן במונחי הזמן העצמי τ

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} \qquad \text{או} \qquad \frac{du^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma$$

היכן ש $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ היא מהירות החלקיק בבסיס הקואורדינטה $u \cdot u = -1$. משוואה גאודזית של קרני אור דומה עד כדי החלפת הזמן העצמי בפרמטר אפיני λ ועם נרמול $u \cdot u = 0$.

גדלים נשמרים $\xi \cdot u = \mathrm{const}$ היכן ש ξ וקטור קילינג, למשל $\xi^\alpha = (0,1,0,0)$ בבסיס קואורדינטה שבו המטריקה $g_{\alpha\beta}(x)$ בלתי תלויה בקואורדינטה x^1.

מרחבים חשובים

<u>(אפשר לעבוד ביחידות גאומטריות $c = G = 1$)</u>

מרחב-זמן שטוח 4 ממדי בקואורדינטות קרטזיות

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

מרחב-זמן שטוח 4 ממדי בקואורדינטות פולריות

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

מטריקה של שדה חלש

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(c\,dt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad \frac{\Phi(x^i)}{c^2} \ll 1$$

גאומטריית שוורצשילד בקואורדינטות שוורצשילד

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(c\,dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

גאומטריית שוורצשילד בקואורדינטות אדינגטון-פינקלשטיין ביחידות גאומטריות

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

היכן שהקואורדינטה החדשה v קשורה לאלו הקודמות בקשר

$$t = v - r - 2M\log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$$

טל. 08-6461655/6/7
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 examunit@bgu.ac.il

בסיסי קואורדינטה ובסיסים אורתונורמליים

אוסף וקטורי בסיס $\{\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\}$ בבסיס אורתונורמלי מקיימים: $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}(x) \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}}(x) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$

אוסף וקטורי בסיס $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ בבסיס הקואורדינטה המתאים לבחירת קואורדינטות x^α כלשהי מקיימים: $\mathbf{e}_\alpha(x) \cdot \mathbf{e}_\beta(x) = g_{\alpha\beta}(x)$

היכן שאלמנט האורך לובש את הצורה $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$ במונחי אותן הקואורדינטות.

בבסיסים שבהם המטריקה אלכסונית $g_{\alpha\beta}(x) = 0$ לכל $\alpha \neq \beta$, ניתן לכתוב בסיס <u>אורתונורמלי</u> שרכיביו בבסיס הקואורדינטה הם

$$(\mathbf{e}_{\hat{0}})^\alpha = [(-g_{00})^{-1/2}, 0, 0, 0], \qquad (\mathbf{e}_{\hat{1}})^\alpha = [0, (g_{11})^{-1/2}, 0, 0], \qquad \text{etc.}$$

מדידה: $E = m\gamma = m(1-(v/c)^2)^{-1/2} = -p \cdot u_{obs}$

<u>גלי כבידה</u>

מטריקה לינארית של גלי גרביטציה עבור הפרעה $h_{\alpha\beta}$ קטנה

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

כיול הרמוני (או כיול לורנץ) עבור גלי כבידה נתון ע״י

$$\Box\, x^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu = 0, \qquad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \qquad h \equiv \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$$

היכן שמתייחסים ל-x^α כפונקציות סקלריות תחת הפעלת הדלאמברטיאן.

בכיול לורנץ משוואות איינשטיין בריק לובשות את הצורה $\Box h_{\alpha\beta} = 0$.

אם בנוסף עובדים בכיול transverse traceless עבור גל הנע בכיוון ציר z ההפרעה לובשת את הצורה:

$$h_{\alpha\beta}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_+(t-z) & f_\times(t-z) & 0 \\ 0 & f_\times(t-z) & -f_+(t-z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היכן שהפונקציות הכלליות $f_+, f_\times$, ניתנות לפירוק פוריה באמצעות גלים מישוריים $e^{i\omega(z-t)}$.

<u>יצור גלי כבידה</u>: נוסחת הקוואדרופול (היכן ש μ היא צפיפות המסה, במקרה של מספר מקורות בדידים האינטגרל מוחלף בסכום, הנוסחה תקפה עבור מקור מבודד):

$$\bar{h}^{ij}(t,r) = \frac{2G}{c^4 r}\frac{d^2}{dt^2}I^{ij}(t-r/c) \qquad I^{ij}(t) \equiv \int d^3x\mu(t,\vec{x})x^i x^j \qquad \begin{pmatrix} \text{weak source,} \\ \text{low velocities,} \\ \text{large } r \end{pmatrix}$$

הספק הקרינה בגלי כבידה (אנרגיה ליחידת זמן) היכן ש $\langle \cdots \rangle$ מסמל ממוצע על זמן מחזור

$$P_{\rm GW} = -\frac{G}{5c^5}\left\langle \frac{d^3 J^{ij}}{dt^3}\frac{d^3 J_{ij}}{dt^3} \right\rangle \qquad J_{ij} \equiv I_{ij} - \frac{1}{3}I\delta_{ij}, \qquad I \equiv I_{ij}\delta^{ij}$$

קוסמולוגיה

מודלים קוסמולוגיים של Friedman-Robertson-Walker:

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \begin{Bmatrix}\sin^2\chi\\ \chi^2\\ \sinh^2\chi\end{Bmatrix}(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)\right], \qquad \begin{Bmatrix}\text{closed}\\ \text{flat}\\ \text{open}\end{Bmatrix}$$

לחילופין

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)\right], \qquad \begin{Bmatrix}k=+1, & \text{closed}\\ k=0, & \text{flat}\\ k=-1, & \text{open}\end{Bmatrix}$$

היכן ש $a(t)$, פקטור הסקלה. קבוע האבל מוגדר ע״י $H(t)=\dot{a}(t)/a(t)$.

משוואת פרידמן הראשונה (עם קבוע קוסמולוגי Λ ועקמומיות מרחבית k):

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

לחילופין, ניתן לבלוע את הקבוע הקוסמולוגי בצפיפות האנרגיה ρ כלומר לכלול בה תרומה $\rho_{vac}=\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$.

משוואת פרידמן השנייה

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)+\frac{\Lambda c^2}{3}$$

את המשוואה השנייה ניתן להחליף בחוק הראשון של התרמודינמיקה במרחב עקום

$$\frac{d}{dt}[\rho(t)a^3(t)] = -\frac{p(t)}{c^2}\frac{d}{dt}[a^3(t)]$$

אינטגרלים שימושיים וזהויות טריגונומטריות

(אינטגרלים שנדרשים לבחינה יוספו לרשימה זו במידת הצורך בגרסא שתחולק עם הבחינה)

$$\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)}} = \pi, \qquad \int_{u_2}^{u_1}\frac{u\,du}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)}} = \frac{1}{2}\pi(u_1+u_2), \qquad u_1>u_2$$

$$\int_0^{a+\sqrt{a^2+1}}\frac{1+ax}{\sqrt{1+2ax-x^2}} = \frac{\pi}{2}+2a+O\left(a^2\right), \qquad a\gg 1$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha), \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$